O r d n u n g s f ä h i g k e i t

t o p o l o g i s c h e r R ä u m e

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Horst Herrlich

aus Berlin

1962

Druck:

Ernst - Reuter - Gesellschaft
der Förderer und Freunde der Freien Universität e.V.

Dissertations - Druckstelle

Berlin-Dahlem, Garystr. 45, Tel.: 76 52 61, App. 668

O r d n u n g s f ä h i g k e i t

t o p o l o g i s c h e r R ä u m e

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Horst Herrlich

aus Berlin

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

1. Berichterstatter: Professor Dr. Grotemeyer
2. Berichterstatter: Professor Dr. Dinghas

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Juli 1962
Tag der Promotion: 19. Dez. 1962

E I N L E I T U N G

Ebenso, wie durch jede Metrik ein topologischer Raum ("metrischer Raum") bestimmt wird, läßt sich durch die Konstruktionsvorschrift von Kapitel O, IIa jeder Ordnung eine Ordnungstopologie und damit ein topologischer Raum ("geordneter Raum") eindeutig zuordnen. Umgekehrt gibt es topologische Räume, die weder metrisierbar noch ordnungsfähig sind, d.h. weder als metrische noch als geordnete Räume aufgefaßt werden können.

Das Problem, hinreichende und notwendige Bedingungen für die Metrisierbarkeit eines topologischen Raumes ("Metrisationsproblem") zu finden, stand lange Zeit im Mittelpunkt topologischer Forschung. Es wurde 1925 für kompakte Räume und für Räume mit abzählbarer Basis von URYSOHN und 1951 von NAGATA-SMIRNOV und BING in voller Allgemeinheit gelöst.

Das analoge Problem für geordnete Räume, d.h. die Frage nach hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die Ordnungsfähigkeit eines topologischen Raumes wird in dieser Arbeit erstmalig in voller Allgemeinheit gestellt und für zusammenhängende, für lokal-zusammenhängende, für abzählbare Räume sowie für total-diskontinuierliche und für kompakte metrische Räume gelöst.

Da die Ordnungsfähigkeit nicht erblich ist (Beispiel 1), liegt es nahe, auch die Frage zu untersuchen, wann ein topologischer Raum Unterraum eines ordnungsfahigen Raumes ist. Sie wird u.a. für zusammenhängende, für lokal-zusammenhängende Räume, für Räume mit abzählbarer Basis sowie für LINDELÖFsche und lokal-kompakte metrische Räume beantwortet.

KAPITEL 0: BEZEICHNUNGEN

I) Ordnung:

a) Eine Teilmenge R von $T \times T$ heißt Ordnung auf T , wenn gilt:
1. für $x \in T, y \in T$ gilt genau eine der drei Beziehungen $(x;y) \in R$, $(y;x) \in R$, $x = y$.
2. $R \cdot R \subset R$.

b) (T,R) heißt geordnete Menge , wenn R Ordnung auf T ist.

c) $xRy =_{df} (x;y) \in R$

d) Ein Schnitt (A/B) ist eine Zerlegung von T in zwei nicht-leere Mengen A,B mit $A \times B \subset R$
Ein Schnitt heißt Lücke , wenn A kein letztes, B kein erstes Element besitzt.
Ein Schnitt heißt Sprung , wenn A ein letztes, B ein erstes Element besitzt.
Ein Schnitt heißt stetiger Schnitt , wenn er weder Sprung noch Lücke ist.

e) Ist (T,R) eine geordnete Menge, U eine Teilmenge von T, so setze man $R/U =_{df} R \cap (U \times U)$.

f) (T,R) sei eine geordnete Menge. Durch Hinzufügen eines ersten Elements $-\infty$ und eines letzten Elements ∞ erhält man die geordnete Menge (T^*,R'). Für $x \in T'$, $y \in T'$ heißt $(x,y)_R =_{df} \{z \mid xR'z, zR'y\}$ offenes Intervall in (T,R).

g) Eine Teilmenge U von T heißt Intervall, wenn aus $a \in U, b \in U$ stets $(a,b)_R \subset U$ folgt.

II) Ordnungstopologie:

a) Ist (T,R) eine geordnete Menge, so bilden die offenen Intervalle die Basis einer Topologie $\mathcal{T}_R$ auf T. $\mathcal{T}_R$ heißt Ordnungstopologie, $(T, \mathcal{T}_R)$ heißt geordneter Raum.

b) Ein topologischer Raum $(T, \mathcal{T})$ heißt ordnungsfähig (o.f.), wenn er einem geordneten Raum homöomorph ist, d.h. wenn es eine Ordnung R auf T mit $\mathcal{T}_R = \mathcal{T}$ gibt. Eine derartige Ordnung heißt mit $\mathcal{T}$ verträglich oder kurz zulässig.

c) Ein topologischer Raum heißt unterordnungsfähig (u.o.f.), wenn er einem Unterraum eines geordneten Raumes homöomorph ist.

d) Ein topologischer Raum heißt lokal-o.f. (lokal-u.o.f.), wenn jeder Punkt eine o.f. (u.o.f.) Umgebung besitzt.

e) Die Ordnung eines geordneten Raumes $(T, \mathcal{T}_R)$ heißt eindeutig bestimmt, wenn R und R^{-1} die einzigen mit $\mathcal{T}_R$ verträglichen Ordnungen sind.

III) Topologie:

a) Ein kompakter, zusammenhängender T_2-Raum heißt Kontinuum; wenn er aus wenigstens zwei Punkten besteht echtes Kontinuum.

b) Ein Punkt x einer zusammenhängenden Menge Z heißt Randpunkt von Z, wenn $Z - \{x\}$ zusammenhängend ist, sonst Schnittpunkt von Z .

c) Ein topologischer Raum heißt randendlich , wenn jede seiner zusammenhängenden Teilmengen höchstens zwei Randpunkte besitzt.

d) Eine Menge, die gleichzeitig offen und abgeschlossen ist, heißt offen-abgeschlossen.

e) Ein topologischer Raum hat die Dimension Null, wenn er eine Basis aus abgeschlossenen Mengen besitzt.

f) Ein topologischer Raum heißt T_0-Raum, wenn von je zwei Punkten wenigstens einer eine Umgebung besitzt, die den anderen nicht enthält.
Ein topologischer Raum heißt T_1-Raum, wenn jede einpunktige Menge abgeschlossen ist.
Ein topologischer Raum heißt T_2-Raum, wenn je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen.
Ein topologischer Raum heißt T_3-Raum, wenn er T_1-Raum ist und jeder Punkt eine Basis aus abgeschlossenen Umgebungen besitzt.
Ein topologischer Raum heißt T_4-Raum, wenn er T_1-Raum ist und jede abgeschlossene Menge eine Basis aus abgeschlossenen Umgebungen besitzt.
Ein topologischer Raum heißt T_5-Raum, wenn jeder Unterraum T_4-Raum ist, d.h. wenn er T_1-Raum ist und je zwei separierte Mengen disjunkte Umgebungen besitzen (URYSOHN).

g) Ist $(T, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, U eine Teilmenge von T, so setze man $\mathfrak{T}/U = {}_{\mathfrak{T}}\{U \cap M \mid M \in \mathfrak{T}\}$

h) Ein topologischer Raum $(T, \mathfrak{T})$ heißt diskontinuierlich, wenn es zu jeder Komponente K und jedem x aus K eine Umgebungsbasis $\mathfrak{U}(x)$ von x so gibt, daß für jedes $U \in \mathfrak{U}(x)$ stets $U \cap C_T K$ in $C_T K$ offen-abge-

schlossen ist.

i) Zerlegt man einen topologischen Raum in seine Komponenten, so heißt der dadurch erzeugte Quotientenraum Komponentenraum.

o.E.d.A. : Ohne Einschränkung der Allgemeinheit.

KAPITEL I : EINIGE EIGENSCHAFTEN GEORDNETER RAUME

Im folgenden sollen einige mehr oder weniger bekannte Eigenschaften geordneter Räume ohne Beweis angeführt werden:

SATZ: 1) Jeder geordnete Raum ist T_5-Raum.
2) " " " " randendlich.
3) " " " " diskontinuierlich.
4) Jeder total-diskontinuierliche geordnete Raum hat die Dimension Null.
5) Der Komponentenraum eines geordneten Raumes hat die Dimension Null.
6) Jede zusammenhängende Teilmenge eines geordneten Raumes ist bezüglich der Ordnung ein Intervall.
7) Der geordnete Raum $(T,\mathcal{T}_R)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn jeder Schnitt in (T,R) ein stetiger Schnitt ist.
8) Der geordnete Raum $(T,\mathcal{T}_R)$ ist genau dann kompakt, wenn (T,R) ein erstes und ein letztes Element aber keine Lücken besitzt.
9) Jeder zusammenhängende geordnete Raum ist lokal-zusammenhängend.
10) Jeder lokal-zusammenhängende geordnete Raum ist lokal-kompakt.
11) Jeder abzählbare geordnete Raum hat eine abzählbare Basis.
12) Die Ordnungsfähigkeit ist weder erblich (Beispiel 1) noch quotiententreu (Beispiel 2) noch produkttreu (Beispiel 3) noch verfeinerungstreu (Beispiel 4).

SATZ:13) $(T,\mathcal{T}_R)$ sei ein geordneter Raum, U eine Teilmenge

von T. Dann gilt $\mathcal{T}_R/U \supset \mathcal{T}_{R/U}$

BEWEIS : Ist x ein Element von U, V eine Umgebung von x bezüglich $\mathcal{T}_{R/U}$, so gibt es Elemente a,b in U mit $x \in (a,b)_{R/U} \subset V$. Also gilt $x \in ((a,b)_R \cap U) \subset V$. Somit ist V Umgebung von x bezüglich $\mathcal{T}_R/U$.

13a) Ist U ein Intervall, so gilt $\mathcal{T}_R/U = \mathcal{T}_{R/U}$

BEWEIS : Trivial.

13b) Ist U zusammenhängend, so gilt $\mathcal{T}_R/U = \mathcal{T}_{R/U}$

BEWEIS : Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 11a und Satz 6.

13c) Ist U kompakt, so gilt $\mathcal{T}_R/U = \mathcal{T}_{R/U}$

BEWEIS : Die Identität ist als umkehrbar eindeutige, stetige Abbildung des kompakten Raumes $(U, \mathcal{T}_R/U)$ in den T_2-Raum $(U, \mathcal{T}_{R/U})$ notwendig ein Homöomorphismus.

SATZ 14) In einem total-diskontinuierlichen, geordneten Raum $(T, \mathcal{T}_R)$ besitzt jede abgeschlossene Menge eine Umgebungsbasis aus offen-abgeschlossenen Mengen.

BEWEIS : Es sei A abgeschlossen in T, W eine offene Umgebung von A. Für jedes x aus A ist $U(x) = \bigcup \{[y,z]_R \mid x \in [y,z]_R \subset W\}$ ein offenes Intervall mit $x \in U(x) \subset W$. Sind U, U' verschiedene Elemente von $\mathfrak{U} = \{U(x) \mid x \in A\}$, so gibt es ein Element z in $C_T W$ derart, daß o.E.d.A. gilt: $U \subset (-\infty, z)_R$, $U' \subset (z, \infty)_R$. Sei U Element von $\mathfrak{U}$.

1. Fall: U ist abgeschlossen in T. Setze V(U)=U !

2. Fall: U ist nicht abgeschlossen in T. Dann gibt es o.E.d.A. ein Element z in $C_T U$ mit $z \in (U \cap (z, \infty)_R)^-$. Da z kein Element von A ist, gibt es einen unste-

tigen Schnitt (B/C) in (T,R) mit $z \in B$, $A \cap B \cap (z,\infty)_R = \emptyset$. Setze V'(U) gleich $U \cap C$! Fall a: V'(U) ist abgeschlossen. Setze V(U) = V'(U) ! Fall b: V = V'(U) ist nicht abgeschlossen. Dann gibt es ein z in $C_T V$ mit $z \in (V \cap (-\infty,z)_R)^-$. Wie oben folgt die Existenz eines unstetigen Schnittes (B/C) mit $z \in C$, $A \cap C \cap (-\infty,z)_R = \emptyset$. Setze V(U) gleich $V \cap B$!

In jedem Fall ist V(U) ein offen-abgeschlossenes Intervall. Setzt man $W = \{V(U) | U \in \mathfrak{U}\}$, so ist $V = \cup\{V | V \in W\}$ eine offene Umgebung von A mit $V \subset W$. Es soll gezeigt werden, daß V abgeschlossen ist. Angenommen $z \in V^- - V$. Dann gilt o.E.d.A. $z \in (V \cap (z,\infty)_R)^-$

1. Fall: Es gibt ein V' in W mit $z \in (V' \cap (z,\infty)_R)^-$ Also $z \in V'^-$, also $z \in V'$, $z \in V$. Widerspruch !

2. Fall: Für jedes y aus $(z,\infty)_R$ gilt $(z,y)_R \cap C_T V \neq \emptyset$. Dann gibt es zu jedem y aus $(z,\infty)_R$ ein V(y) in W mit $V(y) \subset (z,y)_R$, also $A \cap (z,y)_R \neq \emptyset$, also $z \in A^-$, also $z \in A$, $z \in V$. Widerspruch !

SATZ 15) Der geordnete Raum $(T,\mathfrak{T}_R)$ hat genau dann eine abzählbare Basis, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $(T,\mathfrak{T}_R)$ ist separabel,

(2) (T,R) besitzt höchstens abzählbar viele Sprünge.

BEWEIS : a) Die Bedingungen (1), (2) seien erfüllt. Die Menge E aller x aus T, die einen direkten Vorgänger oder einen direkten Nachfolger besitzen, ist wegen (2) abzählbar. F sei

eine abzählbare, dichte Teilmenge von T. Setzt man $\mathbb{D} = E \cup F \cup \{-\infty, \infty\}$, so ist $\mathfrak{B} = \{(x,y)_R \mid x \in \mathbb{D}, y \in \mathbb{D}\}$ eine abzählbare Basis von $(T, \mathcal{T}_R)$.

b) Besitzt $(T, \mathcal{T}_R)$ eine abzählbare Basis, so ist (1) erfüllt. Ferner gibt es eine abzählbare Basis $\mathfrak{B} = \{(x_n, y_n)_R \mid n \in \mathbb{Z}\}$ aus offenen Intervallen. Wäre (2) nicht erfüllt, so gäbe es ein x in T, das von allen y_n verschieden wäre und o.E.d.A. einen direkten Vorgänger y besäße. Somit wäre $(-\infty, x)_R$ eine Umgebung von y und für kein B aus $\mathfrak{B}$ würde $y \in B \subset (-\infty, x)_R$ gelten. Widerspruch !

FOLGERUNGEN

1) Ein zusammenhängender, o.f. Raum hat genau dann eine abzählbare Basis, wenn er separabel ist.
2) Ein lokal-zusammenhängender, o.f. Raum hat genau dann eine abzählbare Basis, wenn er separabel ist.

Da jeder zusammenhängende, o.f., metrische Raum als parakompakter Raum sich als Vereinigung abzählbar vieler Kontinua darstellen läßt, gilt:

3) Ein zusammenhängender, o.f. Raum ist genau dann metrisierbar, wenn er separabel ist.
4) Ein lokal-zusammenhängender, o.f. Raum ist genau dann metrisierbar, wenn jede Komponente separabel ist.
5) Ein separabler , o.f. Raum, der höchstens abzählbar viele offen-abgeschlossene Mengen besitzt, ist metrisierbar.

BEMERKUNG : Es gibt separable, o.f. Räume, die nicht metrisierbar sind (Beispiel 13).

KAPITEL II : DIE EINDEUTIGKEIT DER ORDNUNG

Die Lösung des Ordnungsproblems für zusammenhängende Räume wird in dieser Arbeit in zwei Teile zerlegt. Es werden erstens notwendige und hinreichende Bedingungen für die lokale-O.f. zusammenhängender Räume abgeleitet und es wird zweitens gezeigt, daß in zusammenhängenden Räumen aus der lokalen-O.f. (und den erwähnten Bedingungen) bereits die O.f. folgt. Beim Übergang von der lokalen-O.f. zur O.f. (Kapitel IV, Satz 2) spielt die bekannte Tatsache, daß die Ordnung eines zusammenhängenden Raumes eindeutig bestimmt ist, eine entscheidende Rolle. Ein Beweis dieser Tatsache soll deshalb in diesem Kapitel kurz skizziert werden (Satz 1). Im Anschluß daran wird die naheliegende Frage nach hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür, daß die Ordnung eines o.f. Raumes eindeutig bestimmt ist, gelöst (Satz 2).

SATZ 1) Die Ordnung eines zusammenhängenden, geordneten Raumes $(T,\mathcal{T}_R)$ ist eindeutig bestimmt.
BEWEIS : Angenommen S sei eine von R und R^{-1} verschiedene Ordnung auf T. Dann gibt es Elemente a, b,c,d in T mit aRb, cRd, aSb, dSc. Prüft man sämtliche mit obigen verträgliche Relationen durch, in denen a,b,c,d bezüglich R und S stehen können, so zeigt sich, daß in jedem Fall drei Elemente x,y,z in T existieren mit xRy, yRz, xSy, zSy. Dann liegen x,z bezüglich $\mathcal{T}_R$ in verschiedenen Komponenten von $C_T\{y\}$, bezüglich $\mathcal{T}_S$ aber in derselben Komponente. Also ist S nicht mit $\mathcal{T}_R$ verträglich.

SATZ 2) Die Ordnung eines geordneten Raumes $(T,\mathcal{T}_R)$ ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn eine der folgenden

Bedingungen erfüllt ist:

(1) Der Raum ist zusammenhängend.

(2) Der Raum besteht aus genau zwei Komponenten, von denen eine einpunktig ist, die andere genau einen Randpunkt besitzt.

BEWEIS : a) Ist (1) erfüllt, so ist die Ordnung nach Satz 1 eindeutig bestimmt.

b) Ist (2) erfüllt, so besteht T aus einem isolierten Punkt x und einer Komponente K. Bezüglich R ist x o.E.d.A. kleinstes Element von T. K hat ein kleinstes Element k.

1. Fall: K hat ein größtes Element g. Dann sind k,g Randpunkte von K, also k = g. Somit besteht T nur aus zwei Punkten. Die Ordnung ist eindeutig bestimmt.

2. Fall: K hat kein größtes Element. Ist S eine zulässige Ordnung auf T, so gilt o.E.d.A. nach Kapitel I, Satz 13b und Kapitel II, Satz 1 $S/K = R/K$. Wäre x letztes Element von T bezüglich S, so wäre $x \in K^-$, also T zusammenhängend. Widerspruch ! Somit ist x Anfangselement von T bezüglich S, also S = R.

c) Es seien weder (1) noch (2) erfüllt. Es bleibt zu zeigen, daß eine von R und R^{-1} verschiedene, zulässige Ordnung S existiert.

Fall 1 : (A/B) sei eine Lücke in (T,R).

1a: A habe kein Anfangselement. Setze:
$S = (R/A)^{-1} \cup (A \times B) \cup (R/B)$!

1b: B habe kein Endelement. Analog 1a.

1c: A habe ein Anfangs-, B ein Endelement.
Setze: $S = (R/A)^{-1} \cup (A \times B) \cup (R/B)^{-1}$!

Fall 2 : (A/B) sei ein Sprung in (T,R).

2a: A besitze kein erstes, B kein letztes Element. Man definiere S wie in 1c.

2b: $A = [a_0, a_1]_R$

1. $a_0 \neq a_1$. Man definiere S wie in 1a.
2. $a_0 = a_1$.
   a) $B = [b_0, b_1]_R$. Nach Voraussetzung ist $b_0 \neq b_1$. Man definiere S wie in 1c.
   b) B besitze kein letztes Element. Nach Voraussetzung ist B nicht zusammenhängend, besitzt also einen Sprung oder eine Lücke. Dieser Fall ist somit auf 1b oder 2b1) zurückführbar.

KAPITEL III : KONTINUA

Die Frage, wann ein Kontinuum ordnungsfähig ist, stellt eine Verallgemeinerung des Problems dar, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür zu finden, daß ein topologischer Raum dem durch das reelle Zahlenintervall bestimmten Raum homöomorph ist. Demgemäß stellen die Ergebnisse dieses Kapitels Verallgemeinerungen bereits bekannter Sätze dar. (Siehe WHYBURN, Kapitel III !)

HILFSSATZ 1) Ist Z zusammenhängend, sind A und B separiert und gilt $A \cup B \supset Z$ sowie $A \cap Z \neq \emptyset$, so gilt $A \supset Z$.

BEWEIS : Angenommen $A \not\supset Z$ wäre falsch. Dann wäre $B \cap Z \neq \emptyset$. Also wäre $Z_1 = A \cap Z$, $Z_2 = B \cap Z$ eine Zerlegung von Z in separierte Mengen. Widerspruch !

HILFSSATZ 2) Ist $(T, \mathcal{T})$ ein zusammenhängender T_1-Raum, x ein Element von T und zerfällt $C_T\{x\}$ in die separierten Mengen A,B, so sind $A_1 = A \cup \{x\}$, $B_1 = B \cup \{x\}$ abgeschlossen und zusammenhängend, A,B offen.

BEWEIS : A ist offen bezüglich $C_T\{x\}$, $C_T\{x\}$ offen bezüglich T, also A offen bezüglich T. Analog B. Wäre C,D eine Zerlegung von A_1 in separierte Mengen, x Element von C, so wäre $B \cup C$, D eine Zerlegung von T. Widerspruch ! Also ist A_1 zusammenhängend. Als Komplementärmenge der offenen Menge B ist A_1 abgeschlossen. Analog B_1.

SATZ 1) Jedes echte Kontinuum besitzt wenigstens zwei Randpunkte.

BEWEIS : Angenommen T besitze höchstens einen Randpunkt. Ist s ein beliebiger, festgewählter

Schnittpunkt, so zerfällt $G_T\{s\}$ in die separierten Mengen A,B, wobei B o.E.d.A. keinen Randpunkt besitzt. Man ordne jedem x aus B zwei separierte Mengen A_x, B_x so zu, daß $s \in A_x$ und $A_x \cup B_x = G_T\{x\}$ gilt, ordne weiterhin B wohl, füge ein letztes Element e hinzu und setze $A_e = T$, $B_e = \emptyset$. B habe die Mächtigkeit $\aleph_\alpha \cdot \omega_{\alpha+1}$ sei die kleinste Ordnungszahl mit der zugehörigen Mächtigkeit $\aleph_{\alpha+1}$, $W(\alpha+1)$ die Menge aller Ordnungszahlen, die kleiner als $\omega_{\alpha+1}$ sind. Man ordne jeder Ordnungszahl μ aus $W(\alpha+1)$ durch transfinite Induktion mittels folgender Vorschrift ein $x(\mu) \in B \cup \{e\}$ zu:

1. x(o) sei bezüglich der Wohlordnung das kleinste Element von B.
2. $x(\mu)$ sei bezüglich der Wohlordnung das kleinste Element von B, das nicht in $\bigcup_{\nu<\mu}(A_{x(\nu)} \cup \{x(\nu)\})$ liegt, sonst gleich e.

Ist $\nu < \mu$, so erhält man, wenn man Hilfssatz 1 A,B,Z durch $A_{x(\mu)}$, $B_{x(\mu)}$, $A_{x(\nu)} \cup \{x(\nu)\}$ ersetzt, aus $s \in A_{x(\nu)} \cap A_{x(\mu)}$ die Folgerung $A_{x(\nu)} \cup \{x(\nu)\} \subset A_{x(\mu)}$. Ist μ Limeszahl, so gilt:
$\bigcup_{\nu<\mu}(A_{x(\nu)} \cup \{x(\nu)\}) \subset \bigcup_{\nu<\mu} A_{x(\nu+1)} \subset A_{x(\mu)}$
Da B die Mächtigkeit $\aleph_{\alpha+1} \cdot W(\alpha+1)$ aber die Mächtigkeit $\aleph_{\alpha+1}$ hat, gibt es $\mu < \nu$ mit $x(\mu) = x(\nu)$. Das ist aber nur dann möglich, wenn $x(\mu) = e$ gilt. Sei μ_0 die kleinste Ordnungszahl μ von $W(\alpha+1)$ mit $x(\mu) = e$. Hätte μ_0 einen direkten Vorgänger λ , so wäre $T = \bigcup_{\mu<\mu_0}(A_{x(\mu)} \cup \{x(\mu)\}) = A_{x(\lambda)} \cup \{x(\lambda)\}$, also $B_{x(\lambda)} = \emptyset$. Widerspruch ! Somit ist μ_0 eine Limeszahl. Also gilt:
$T = \bigcup_{\mu<\mu_0}(A_{x(\mu)} \cup \{x(\mu)\}) \subset \bigcup_{\mu<\mu_0} A_{x(\mu+1)} \subset \bigcup_{\mu<\mu_0} A_{x(\mu)}$.

Da für jedes x aus B die Menge A_x offen ist, bildet $\mathfrak{B}=\{A_{x(\mu)} \mid \mu<\mu_0\}$ eine offene Überdeckung von T. Würde T bereits durch endlich viele Mengen $A_{x(\nu_1)},\dots,A_{x(\nu_n)}$ überdeckt werden und wäre $\nu_0=\max\{\nu_1,\dots,\nu_n\}$, so wäre $T=\bigcup_{\nu\in\nu_0} A_{x(\nu)}=A_{x(\nu_0)}$ also $\nu_0\geq\mu_0$. Widerspruch ! T ist nicht kompakt, obige Annahme somit falsch.

HILFSSATZ 3) Besitzt ein Kontinuum $(T,\mathfrak{T})$ genau zwei Randpunkte a,b und ist x ein beliebiger Schnittpunkt von T, so zerfällt $C_T\{x\}$ in zwei separierte, zusammenhängende Mengen A,B mit $a\in A$, $b\in B$.

BEWEIS : 1) $C_T\{x\}$ zerfällt in zwei separierte Mengen A,B. Angenommen $\{a,b\}\subset A$. $\mathfrak{B}_0=\mathfrak{B}\cup\{x\}$ ist ein echtes Kontinuum, besitzt also nach Satz 1 mindestens einen von x verschiedenen Randpunkt r. $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}_0-\{r\}$, $A_1=A\cup\{x\}$ sind zusammenhängend. Wegen $x\in\mathfrak{B}_1\cap A_1$ ist auch $\mathfrak{B}_1\cup A_1=C_T\{r\}$ zusammenhängend. Also ist r Randpunkt von T. Widerspruch ! Somit $a\in A$, $b\in B$.

2) Angenommen A sei nicht zusammenhängend. Dann ist x kein Randpunkt von $A_1=A\cup\{x\}$. A_1 ist nach Hilfssatz 2 ein (echtes) Kontinuum, besitzt somit nach Satz 1 einen von a verschiedenen Randpunkt r. $A_1-\{r\}$, $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}\cup\{x\}$ sind zusammenhängend. $x\in(A_1-\{r\})\cap\mathfrak{B}_1$. Also ist $\mathfrak{B}_1\cup(A_1-\{r\})=C_T\{r\}$ zusammenhängend, r somit Randpunkt von T. Widerspruch !

SATZ 2) Ein Kontinuum ist genau dann o.f., wenn es höchstens zwei Randpunkte besitzt.

BEWEIS : 1) Die Bedingung ist offenbar notwendig.

2) Das Kontinuum $(T,\mathcal{T})$ besitze höchstens zwei Randpunkte.

a) $(T,\mathcal{T})$ besitze nur einen Randpunkt. Dann ist T nach Satz 1 einpunktig.

b) $(T,\mathcal{T})$ besitze zwei Randpunkte a,b. Man ordne jedem x aus $C_T\{a,b\}$ zwei separierte, zusammenhängende Mengen A(x), B(x) mit $A(x) \cup B(x) = C_T\{x\}$, $a \in A(x)$, $b \in B(x)$ zu, was nach Hilfssatz 3 stets möglich ist. Es soll gezeigt werden, daß $R = \{(x;y) \mid x \in A(y)\}$ eine mit $\mathcal{T}$ verträgliche Ordnung auf T definiert.

1. Aus $x \in A(y)$ folgt $x \notin B(y)$. Ersetzt man in Hilfssatz 1 A,B,Z durch B(x), A(x), $B(y) \cup \{y\}$, so erhält man $B(y) \cup \{y\} \subset B(x)$, also $y \in B(x)$. Analog folgt aus $y \in B(x)$ stets $x \in A(y)$, beide Aussagen sind also äquivalent.
2. Es gelte xRy, yRz. Dann folgt wie oben $B(y) \cup \{y\} \subset B(x)$, $B(z) \cup \{z\} \subset B(y)$, also $z \in B(x)$, also $x \in A(z)$, also xRz.
3. Sei $x \neq y$, $x \notin A(y)$. Ersetzt man in Hilfssatz 1 A,B,Z durch A(x), B(x), $A(y) \cup \{y\}$ so erhält man $A(y) \cup \{y\} \subset A(x)$, also $y \in A(x)$, also yRx. Es gilt also wenigstens eine der drei Relationen x = y, xRy, yRx.
4. Es gilt höchstens eine dieser drei Relationen, weil xRx für kein x aus T gilt.

R definiert eine Ordnung auf T. Die Identität i bildet den kompakten Raum $(T,\mathcal{T})$ umkehrbar eindeutig auf den T_2-Raum $(T,\mathcal{T}_R)$ ab. Da für jedes x die Mengen A(x), B(x)

offen sind, ist i stetig, also ein Homöomorphismus.

Da jeder o.f., zusammenhänge Raum lokal-zusammenhängend ist, gilt:

FOLGERUNG : Jedes Kontinuum, das höchstens zwei Randpunkte besitzt, ist lokal-zusammenhängend.

Bei den Beweisen von Satz 1, Hilfssatz 2 und Satz 2 wurde vom T_2-Axiom kein Gebrauch gemacht. Es gelten also die Sätze:

SATZ 1a) Jeder mehr als einpunktige, kompakte, zusammenhängende T_1-Raum besitzt wenigstens zwei Randpunkte.

SATZ 2a) Ein kompakter, zusammenhängender T_1-Raum ist genau dann o.f., wenn er höchstens zwei Randpunkte besitzt.

BEMERKUNG : Ein kompakter, zusammenhängender T_0-Raum mit zwei Randpunkten ist nicht notwendig o.f. (Beispiel 10).

SATZ 3) Ein topologischer Raum $(T,\mathfrak{T})$ ist dem durch das reelle Zahlenintervall $[0,1]$ bestimmten Raum genau dann homöomorph, wenn er ein separables, randendliches, echtes Kontinuum ist.

BEWEIS : 1) Die Bedingung ist offenbar notwendig.

2) Erfüllt $(T,\mathfrak{T})$ obige Bedingung, so besitzt er nach Satz 2 eine zulässige Ordnung R und eine abzählbare, dichte Menge D, von der o.E. d.A. vorausgesetzt werden kann, daß sie bezüglich R/D ein erstes und ein letztes Element besitzt. Ferner besitzt D bezüglich R/D keine

Sprünge; denn sonst wäre $(T,\mathcal{T})$ nicht zusammenhängend. Also gibt es eine Ähnlichkeitsabbildung f von D auf die Menge der rationalen Zahlen aus $[0,1]$ (Siehe KAMKE, Seite 100, Satz 3). Dann bildet

$$g(x) = \sup \{ f(y) \mid y \in D,\ yRx \text{ oder } y = x \}$$

einen Homöomorphismus von $(T,\mathcal{T})$ auf den durch $[0,1]$ bestimmten Raum.

Jeder u.o.f. Raum läßt sich offenbar durch "Ausfüllen" der Lücken und Sprungstellen in ein o.f. Kontinuum einbetten. Somit folgt aus Satz 2:

SATZ 4) Ein topologischer Raum ist genau dann u.o.f., wenn er in ein randendliches Kontinuum eingebettet werden kann.

Durch diesen Satz wird das Ordnungsproblem auf ein Einbettungsproblem zurückgeführt.

KAPITEL IV : LOKALE ORDNUNGSFÄHIGKEIT

Wann ist ein lokal-o.f. Raum bereits o.f. (u.o.f.) ? Diese Frage ist erstens an sich reizvoll und ihre Lösung erlaubt zweitens eine Rückführung des Ordnungsproblems auf die Frage nach Bedingungen für die lokale O.f., also die Umformung eines "globalen" in ein "lokales" Problem.

Unter Benutzung der in Kapitel II bewiesenen Tatsache, daß die Ordnung eines zusammenhängenden Raumes eindeutig bestimmt ist, gelingt es zu zeigen, daß ein zusammenhängender, lokal-o.f. Raum genau dann o.f. ist, wenn er ein randendlicher T_3-Raum ist (Satz 2). Beide Bedingungen sind wesentlich (Beispiel 2 und 4).

In Räumen, die nicht zusammenhängend sind, kann es Mengen M, N (M>N) mit den zulässigen Ordnungen R_M , R_N so geben, daß $R_M|N$ von R_N und R_N^{-1} verschieden ist. Aus diesem Grunde ist das für zusammenhängende Räume benutzte Beweisverfahren hier nicht anwendbar. Dennoch gelingt es, obiges Problem für lokal-zusammenhängende Räume (Satz 5) und für LINDELÖF-Räume (Satz 6) zu lösen.

HILFSSATZ 1) $(T,\mathcal{T})$ sei ein topologischer Raum, U eine durch R zulässig geordnete Umgebung eines Punktes x aus T. Dann gibt es zu jeder Umgebung V von x Elemente a,b in U' mit aR'x, xR'b, $(a,b)_R \subset V$

BEWEIS : Angenommen es gäbe kein a in U' mit aR'x, $(a,x]_R \subset V$. Dann wäre x Häufungspunkt von $W = C_T V \cap (-\infty,x)_R$ bezüglich $\mathcal{T}_R$, aber kein Häufungspunkt von W bezüglich $\mathcal{T}$. Widerspruch !

HILFSSATZ 2) In einem lokal-o.f. $\overline{T}_3$-Raum $(T,\mathfrak{T})$ gibt es zu jedem x aus T eine abgeschlossene, durch R zulässig geordnete Umgebung $W=[a,b]_R$ mit $(a,b)_R \in \mathfrak{T}$. Ferner ist $\mathfrak{B} = \{ (u,v)_R \mid uR'x, xR'v \}$ eine Umgebungsbasis von x.

BEWEIS : U sei eine durch S zulässig geordnete Umgebung von x, V eine abgeschlossene Umgebung von x mit $V \subset U$. Nach Hilfssatz 1 gibt es Elemente c, d in U' mit cS'x, xS'd, $(c,d)_S \subset V^\circ$.

Setze: $a = \begin{cases} x & \text{, falls } (c,x)_S = \emptyset \\ \text{beliebiges Element aus } (c,x)_S & \text{, sonst,} \end{cases}$

$b = \begin{cases} x & \text{, falls } (x,d)_S = \emptyset \\ \text{beliebiges Element aus } (x,d)_S & \text{, sonst !} \end{cases}$

Setze ferner: $W=[a,b]_S$, R = S/W ! Dann gilt:

1. W ist abgeschlossen in U, also auch in V. Da V in T abgeschlossen ist, muß auch W in T abgeschlossen sein.
2. $(a,b)_R$ ist offen in U, also auch in U°. Da U° in T offen ist, muß auch $(a,b)_R$ in T offen sein.
3. Jede Menge aus $\mathfrak{B}$ ist offene Umgebung von x. Nach Hilfssatz 1 ist $\mathfrak{B}$ eine Umgebungsbasis von x.

HILFSSATZ 3) In einem zusammenhängenden, lokal-o.f. $\overline{T}_3$-Raum $(T,\mathfrak{T})$ gibt es zu jedem x aus T eine zusammenhängende, abgeschlossene, durch R zulässig geordnete Umgebung $U=[a,b]_R$ mit $(a,b)_R \in \mathfrak{T}$.

BEWEIS : Nach Hilfssatz 2 gibt es eine durch S zulässig geordnete, abgeschlossene Umgebung $W=[c,d]_S$ von x mit $(c,d)_S \in \mathfrak{T}$.

1. Fall: W ist zusammenhängend. Setze U = W, R = S !

2. Fall: W besitzt einen einzigen unstetigen Schnitt (A/B). Sei o.E.d.A. x Element von A.

a) x ist letztes Element von A. Setze $U=[c,x]_S$, R = S/U !

b) Es sei y ein festes Element aus A mit xRy. Setze $U=[c,y]_S$, R = S/U !

3. Fall: Es gibt zwei verschiedene Schnitte (A/B), (C/D) in W. Es gilt o.E.d.A. $A \subset C$. Dann ist $B \cap C$ eine nicht-leere, offen-abgeschlossene Teilmenge von T. Widerspruch !

FOLGERUNG : Jeder zusammenhängende, lokal-o.f. $\overline{T}_3$-Raum ist lokal-zusammenhängend.

SATZ 1) Ist $(T,\mathcal{T})$ ein zusammenhängender lokal-o.f., randendlicher $\overline{T}_3$-Raum, U eine zusammenhängende, durch R zulässig geordnete Teilmenge von T, so gibt es zu jedem x aus U^- eine zusammenhängende Umgebung V derart, daß $U \cup V$ o.f. ist.

BEWEIS : Ist x Element von U°, so setze man V = U. Sei also x Element von $U^- - U^\circ$.

1. Fall: Es gibt eine Umgebung W von x und Elemente a, b in U mit $W \cap U \subset [a,b]_R$. Also $x \in ([a,b]_R)^-$. Da $[a,b]_R$ als zusammenhängender, geordneter Raum mit Anfangs- und Endpunkt notwendig kompakt also in $(T,\mathcal{T})$ abgeschlossen ist, muß x Element von $[a,b]_R$ sein. Wegen $x \notin U^\circ$ gilt o.E.d.A. x = b. Sei W eine zusammenhängende, durch S zulässig geordnete Umgebung von b mit den Eigenschaften von Hilfssatz 3.

Dann gibt es ein u in $U-\{b\}$, so daß $[u,b]_R \subset W$ gilt. Die Ordnung der zusammenhängenden Menge $Z = [u,b]_R$ ist nach Kapitel II, Satz 1 eindeutig bestimmt. Somit gilt o.E.d.A. R/Z = S/Z.

a) b ist letztes Element von W. Setze V = Z !

b) $(x,\infty)_S \neq \emptyset$. Da b kein Häufungspunkt von $(-\infty,u)_R$ ist, gibt es ein w in W mit xSw und $(-\infty,u)_R \cap (x,w)_S = \emptyset$. Setze $V = [u,w]_S$!

2. Fall: Für jede Umgebung W von x und jedes u aus U gilt o.E.d.A. stets $(u,\infty)_R \cap W \neq \emptyset$; insbesondere besitzt also U bezüglich R kein letztes Element. Seien a, b, c drei Elemente aus U mit aRb, bRc und sei W eine zu $\{a,b,c\}$ disjunkte, zusammenhängende, durch S zulässig geordnete Umgebung von x mit den Eigenschaften von Hilfssatz 3. Dann sind $(-\infty,a)_R$ und W disjunkt; denn sonst wären a, b, c Randpunkte von $U \cup W$. Sei w Element von $U \cap W$:

a) Zu jedem u aus U gibt es ein v in U mit uRv, $v \notin W$. Dann gibt es unendlich viele Punkte in $(w,\infty)_R - W$. Alle diese Punkte sind Randpunkte von $U \cup W$. Widerspruch !

b) Es gibt ein u in U mit $(u,\infty)_R \subset W$. Man verfahre weiter wie in Fall 1 !

SATZ 2) Ein lokal-o.f., zusammenhängender Raum ist genau dann o.f., wenn er randendlicher T_3-Raum ist.

BEWEIS : 1) $(T,\mathcal{T})$ sei ein lokal-o.f., zusammenhängender, randendlicher T_3-Raum. Die Menge $\mathfrak{M}$ aller zusammenhängenden, o.f. Teilmengen von T wird durch Inklusion teilweise geordnet. Ist J eine wohlgeordnete Indexmenge mit $\leq$ und Anfangselement o, f eine Abbildung von J in $\mathfrak{M}$, so daß aus $i < j$ stets $f(i) \subset f(j)$ folgt, so ist $T = \bigcup_{i \in J} f(i)$ wieder zusammenhängend. Sei f(o) mehr als einpunktig, R_o eine zulässige Ordnung von f(o). Dann gibt es zu jedem f(j) genau eine zulässige Ordnung R_j mit $R_j | f(o) = R_o$. Wegen der Randendlichkeit ist $R = \bigcup_{i \in J} R_i$ eine zulässige Ordnung von F. F ist Element von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ also induktiv geordnet, besitzt somit ein maximales Element M. Nach Satz 1 ist M offen-abgeschlossen in T, also gleich T.
2) Die Umkehrung ist trivial.

BEMERKUNGEN :

1) Es gibt lokal-o.f., zusammenhängende, randendliche T_2-Räume, die nicht o.f. sind (Beispiel 4).
2) Es gibt lokal-o.f., zusammenhängende T_3-Räume, die nicht o.f. sind (Beispiel 2).

Mit Satz 2 ist die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein lokal-o.f. Raum bereits o.f. ist, für zusammenhängende Räume vollständig gelöst. Dagegen zeigt Beispiel 1, daß aus der lokalen O.f. in nicht-zusammenhängenden Räumen selbst unter erheblich starken Zusatz-Voraussetzungen im allgemeinen nicht die O.f. folgt. Man darf aber erwarten, daß ein lokal-o.f. Raum unter entsprechenden Voraussetzungen u.o.f. sein

wird. Es empfiehlt sich daher, die Problemstellung leicht zu variieren und nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu fragen, daß ein lokal-o.f. Raum bereits u.o.f. ist. Mit Hilfe von Satz 3 und Hilfssatz 4 erhält man eine Lösung dieses Problems für lokal-zusammenhängende Räume (Satz 5), mit Hilfe von Satz 4 und Hilfssatz 4 für LINDELÖF-Räume (Satz 6).

SATZ 3) In einem lokal-o.f., randendlichen T_3-Raum $(T,\mathcal{T})$ ist jede Komponente o.f.

BEWEIS : Ist K eine Komponente in $(T,\mathcal{T})$, so ist $(K,\mathcal{T}|K)$ ein randendlicher, zusammenhängender T_3-Raum. Es genügt also nach Satz 2 zu zeigen, daß er lokal-o.f. ist. Nach Hilfssatz 2 gibt es zu jedem x aus K eine abgeschlossene, durch R zulässig geordnete Umgebung $U=[a,b]_R$ mit $(a,b)_R \in \mathcal{T}$.

1. Fall: Es gibt ein c in $[a,x)_R$ und ein d in $(x,b]_R$, so daß $(c,d)_R$ zusammenhängend ist. Dann ist $(c,d)_R$ eine o.f. Umgebung von x in K.

2. Fall: Es gibt ein c in $[a,x)_R$, so daß $(c,x]_R$ zusammenhängend ist,und es gilt x = b. Dann ist $(c,x]_R$ eine o.f. Umgebung von x in K.

3. Fall: Es gibt ein c in $[a,x)_R$, so daß $(c,x]_R$ zusammenhängend ist, aber kein d in $(x,b]_R$, so daß $[x,d)_R$ zusammenhängend ist.

   a) Es gibt ein d in $(x,b]_R$, so daß $(x,d)_R$ zu K disjunkt ist. Dann ist $(c,x]_R$ o.f. Umgebung von x in K.

   b) Es gilt $x \neq b$ und für kein d aus

$[x,b]_R$ ist $(x,d)_R$ zu K disjunkt. Dann gibt es zwei verschiedene, unstetige Schnitte (A/B), (C/D) in $(x,b]_R$ mit $A \subset C$, $B \cap C \cap K \neq \emptyset$. $B \cap C$ ist eine nicht-leere, offen-abgeschlossene Teilmenge von T. Also gilt $B \cap C \supset K$. Andererseits gilt $x \notin B \cap C$. Widerspruch ! Dieser Fall kann nicht eintreten.

4. Fall: Alle weiteren Fälle sind auf die Fälle 1. - 3. zurückführbar.

BEMERKUNG : Ein beliebiger Unterraum eines lokal-o.f. Raumes ist nicht notwendig lokal-o.f. (Beispiel 8).

SATZ 4) In einem lokal-o.f., randendlichen T_3-Raum besitzt jeder Punkt eine offen-abgeschlossene, o.f. Umgebung U.

BEWEIS : x sei ein Punkt aus T, K die Komponente, welche x enthält.

1. Fall: K sei einpunktig. Nach Hilfssatz 2 gibt es eine abgeschlossene, durch R zulässig geordnete Umgebung $[a,b]_R$ von x mit $(a,b)_R \in \mathfrak{T}$.

a) $a = b = x$. Setze $U = \{x\}$!

b) $a = x \neq b$. Dann besitzt $[x,b]_R$ einen unstetigen Schnitt (A/B). Setze $U = A$!

c) $a \neq x = b$. Analog b).

d) $a \neq x \neq b$. Es gibt einen unstetigen Schnitt (A/B) in $[a,x]_R$ und einen unstetigen Schnitt (C/D) in $[x,b]_R$ Setze $U = B \cup C$!

2. Fall: K enthält wenigstens 2 Punkte. R sei eine zulässige Ordnung auf K.

a) K besitzt bezüglich R weder ein Anfangs- noch ein Endelement. Setze U = K !

b) K besitzt bezüglich R ein Anfangselement a, aber kein Endelement. Nach Hilfssatz 2 gibt es eine abgeschlossene, durch S zulässig geordnete Umgebung $V=[b,c]_S$ von a mit $(b,c)_S \in \mathfrak{T}$. Dann gibt es ein y in $(a,\infty)_R$ mit $(a,y)_R \subset V$. Es gilt o.E.d.A. $R|(a,y)_R = S|(a,y)_R$.

1) a ist Anfangselement von V bezüglich S. Setze U = K !

2) a ist nicht Anfangselement von V bezüglich S. Dann gibt es einen unstetigen Schnitt (A/B) in $(-\infty,a]_S$ mit $B \cap [y,\infty)_R = \emptyset$. Setze $U = K \cup B$!

c) K besitzt bezüglich R ein End- aber kein Anfangselement. Analog b).

d) $K = [a,b]_R$. Es seien $U_1=[c_1,d_1]_{S_1}$, $U_2=[c_2,d_2]_{S_2}$ disjunkte, abgeschlossene, durch S_1, S_2 zulässig geordnete Umgebungen von a, b mit $(c_i,d_i)_{S_i} \in \mathfrak{T}$ für i = 1, 2. Es gibt u_1, u_2 in K mit $[a,u_1]_R \subset U_1$, $[u_2,b]_R \subset U_2$. Dann gilt o.E.d.A. $R|[a,u_1]_R = S_1|[a,u_1]_R$, $R|[u_2,b]_R = S_2|[u_2,b]_R$.

1) a ist Anfangselement von U_1 bezüglich S_1, b Endelement von U_2 bezüglich S_2. Setze U = K!

2) a ist Anfangspunkt von U_1 bezüglich S_1, b kein Endpunkt von U_2 bezüglich S_2. Dann gibt es einen unstetigen Schnitt (A/B) in $[b,\infty)_{S_2}$ mit $A \cap [a,u_2] = \emptyset$. Setze $U = A \cup K$!

3) a ist kein Anfangspunkt von U_1 bezüglich S_1, b ist Endpunkt von U_2 bezüglich S_2. Analog 2).

4) a ist kein Anfangspunkt von U_1 bezüglich S_1, b kein Endpunkt von U_2 bezüglich S_2. Es gibt unstetige Schnitte $(A_1|B_1)$, $(A_2|B_2)$ in $(-\infty,a]_{S_1}$, $[b,\infty)_{S_2}$ mit $B_1 \cap [u_1,b]_R = A_2 \cap [a,u_2]_R = \emptyset$. Setze $U = K \cup B_1 \cup A_2$!

HILFSSATZ 4) Ist $(T,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\mathfrak{L}$ eine offene Überdeckung von T durch paarweise disjunkte, u.o.f. Mengen, so ist $(T,\mathcal{T})$ u.o.f. Ist jede Menge aus $\mathfrak{L}$ o.f. und ist eine der folgenden Bedingungen erfüllt, so ist $(T,\mathcal{T})$ o.f.:

(1) Keine Menge aus $\mathfrak{L}$ besitzt ein Anfangs- und ein Endelement.

(2) Jede Menge aus $\mathfrak{L}$ besitzt ein Anfangs- und ein Endelement.

(3) Unendlich viele Mengen aus $\mathfrak{L}$ besitzen ein Anfangs- und ein Endelement.

(4) Wenigstens eine Menge aus $\mathfrak{L}$ besitzt entweder ein Anfangs- oder ein Endelement.

BEWEIS : 1) Jedes B aus $\mathfrak{L}$ sei in eine Menge A(B) mit der zulässigen Ordnung R(B) eingebettet, $A(B) \cap T = B$. Dabei kann o.E.d.A. vorausge-

setzt werden, daß A(B) bezüglich R(B) ein Anfangs- und ein Endelement besitzt. $\mathfrak{A} = \{A(B) | B \in \mathfrak{B}\}$ habe die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ (Bezeichnungsweise nach KAMKE). (T_1, R_1) sei eine geordnete Menge vom Ordnungstyp $(-\omega_0 + \omega_0)\cdot\omega_\alpha$, f eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf T_1. Dann ist $R = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} R(B) \cup \{(x,y) | x \in A_1, y \in A_2, f(A_1) R f(A_2)\}$ eine zulässige Ordnung auf $A = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} A(B)$. (T, R) ist u.o.f.

2) Jedes B aus $\mathfrak{B}$ besitze eine zulässige Ordnung R(B). $\mathfrak{B}_0$ sei die Menge der B aus $\mathfrak{B}$, die bezüglich R(B) weder Anfangs- noch Endpunkt besitzen. $\mathfrak{B}_1$ sei die Menge der B aus $\mathfrak{B}$, die bezüglich R(B) entweder einen Anfangs- oder einen Endpunkt besitzen. $\mathfrak{B}_2$ sei die Menge der B aus $\mathfrak{B}$, die bezüglich R(B) einen Anfangs- und einen Endpunkt besitzen. Sei $T_i = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}_i} B$ für i =0, 1,2. Dann ist jedes T_i offen-abgeschlossen in T. Ähnlich wie in 1) zeigt man, daß jedes T_i eine zulässige Ordnung R_i besitzt. Ist T_0 nicht-leer, so kann stets erreicht werden, daß T_0 bezüglich R_0 ein letztes Element besitzt. Ist T_1 nicht-leer, so kann stets erreicht werden, daß T_1 bezüglich R_1 ein erstes aber kein letztes Element besitzt. Ist eine der Bedingungen (1), (2), (4) erfüllt, so ist $R = \bigcup_0^2 R_i \cup (T_0 \times T_1) \cup (T_0 \times T_2) \cup (T_1 \times T_2)$ eine zulässige Ordnung auf T. Ist (3) erfüllt, so kann erreicht werden, daß T_0 bezüglich R_0 kein Endelement besitzt. Dann ist oben definiertes R zulässige Ordnung auf T.

FOLGERUNG : Jeder diskrete Raum ist o.f.

SATZ 5) Ein lokal-o.f., lokal-zusammenhängender Raum ist genau dann u.o.f., wenn er ein randendlicher T_3-Raum ist.
BEWEIS : 1) Die Bedingung ist offenbar notwendig. 2) Ist $(T,\mathfrak{T})$ ein lokal-o.f., lokalzusammenhängender, randendlicher T_3-Raum, so ist die Menge aller Komponenten von T eine offene Überdeckung von T durch paarweise disjunkte Mengen, die nach Satz 3 o.f. sind. Nach Hilfssatz 4 ist $(T,\mathfrak{T})$ u.o.f.

SATZ 5a) Ein lokal-o.f., lokal-zusammenhängender Raum $(T,\mathfrak{T})$ ist genau dann o.f., wenn er randendlicher T_3-Raum ist und einer der folgenden Bedingungen genügt:
(1) Keine Komponente von $(T,\mathfrak{T})$ ist kompakt.
(2) Jede " " " " " " .
(3) Unendlich viele Komponenten von $(T,\mathfrak{T})$ sind kompakt.
(4) Es gibt wenigstens eine nicht-kompakte Komponente von $(T,\mathfrak{T})$ mit einem Randpunkt.
BEWEIS : Analog Satz 5.

SATZ 6) Ein lokal-o.f. LINDELÖF-Raum ist genau dann u.o.f., wenn er randendlicher T_3-Raum ist.
BEWEIS : 1) Die Bedingung ist offenbar notwendig. 2) Ist $(T,\mathfrak{T})$ ein lokal-o.f., randendlicher, LINDELÖFscher T_3-Raum, so besitzt jeder Punkt x aus T nach Satz 4 eine offen-abgeschlossene Umgebung U(x) mit der zulässigen Ordnung R(x). $\mathfrak{U} = \{U(x) \mid x \in T\}$ ist eine offene Überdeckung von T, enthält also eine abzählbare

Teilüberdeckung $\mathfrak{U}'=\{U^n \mid n\in Z\}$ von T (Z sei die Menge der natürlichen Zahlen). Setzt man $V^n=U^n-\bigcup_{m<n} U^m$, so ist $\mathfrak{V}=\{V^n \mid n\in Z\}$ eine offene Überdeckung von T durch paarweise disjunkte, u.o.f. Mengen. T ist nach Hilfssatz 4 u.o.f.

Tatsächlich wurde sogar der etwas schärfere Satz bewiesen:

SATZ 6a) Jeder lokal-u.o.f., randendliche T_3-Raum, dessen Komponentenraum ein LINDELÖF-Raum ist, ist u.o.f.

BEMERKUNG : Weder in einem der Sätze 1 bis 4, 6 und 6a noch in einem der Hilfssätze 2 und 3 kann das T_3-Axiom durch das schwächere T_2-Axiom ersetzt werden (Beispiel 4).

Die naheliegende Frage, ob die LINDELÖF-Bedingung in Satz 6 wesentlich ist, muß bejaht werden; denn es gibt lokal-o.f., randendliche T_3-Räume, die nicht u.o.f. sind (Beispiel 12). Da der in Beispiel 12 genannte Raum kein T_4-Raum ist, erhebt sich sofort die weitere Frage, ob jeder lokal-o.f., randendliche T_4-Raum (oder wenigstens jeder lokal-o.f., randendliche T_5-Raum) bereits u.o.f. ist. Gelänge es, diese Frage im positiven Sinne zu entscheiden, so wäre das am Anfang des vorliegenden Kapitels gestellte Problem vollständig gelöst.

Anschließend soll das Ergebnis von Satz 6 auf kompakte Räume angewandt werden (Satz 7); ferner sollen einige Zusatzbedingungen genannt werden, unter denen ein lokal-o.f., randendlicher, LINDELÖFscher T_3-Raum nicht nur u.o.f. sondern sogar o.f. ist (Satz 8), und schließlich soll an einem etwas abseits gelegenen Beispiel gezeigt werden, wie die O.f. eines Raumes auf dem Umweg

über die lokale-O.f. bewiesen werden kann (Satz 9).

SATZ 7) Ein lokal-o.f., kompakter Raum ist genau dann o.f., wenn er ein randendlicher T_2-Raum ist.
BEWEIS : 1) Die Bedingung ist offenbar notwendig. 2) Ein lokal-o.f., kompakter, randendlicher T_2-Raum ist nach Satz 6 u.o.f., also als kompakter, u.o.f. Raum nach Kapitel I, Satz 13c sogar o.f.

SATZ 8) Jeder lokal-o.f., total-diskontinuierliche, LINDELÖFsche T_3-Raum, der dem 1. Abzählbarkeitsaxiom genügt, ist o.f.
BEWEIS : $(T,\mathfrak{T})$ sei ein Raum, der obigen Bedingungen genügt, $(T^1,\mathfrak{T}^1)$ sei der in Satz 6 konstruierte, $(T,\mathfrak{T})$ umfassende, durch S^1 zulässig geordnete Raum. Dann gilt nach Konstruktion $T \in \mathfrak{T}^1$. Ein Intervall von (T^1,S^1) heiße günstig, wenn es ganz in T liegt. Ein günstiges Intervall heiße maximal, wenn es kein echt größeres, günstiges Intervall gibt. Jedes maximale Intervall ist abgeschlossen bezüglich $(T,\mathfrak{T})$ und wegen $T \in \mathfrak{T}^1$ auch offen bezüglich $(T,\mathfrak{T})$. Somit zerfällt $(T,\mathfrak{T})$ in eine Menge $\mathfrak{L}$ paarweise disjunkter, o.f., offener Teilmengen. Für jedes B aus $\mathfrak{L}$ sei R(B) eine zulässige Ordnung. Man zerlege $\mathfrak{L}$ wie beim Beweis von Hilfssatz 4 in die Mengen $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$.
1. Fall: $\mathfrak{L}_0 = \emptyset$. Dann ist (2) oder (4) von Hilfssatz 4 erfüllt, $(T,\mathfrak{T})$ also o.f.
2. Fall: $\mathfrak{L}_0 \neq \emptyset$. B sei Element von $\mathfrak{L}_0$.
a) B besitzt bezüglich R(B) einen Sprung (A/B). Dann ist
$S(B) = (R(B)|A)^{-1} \cup (A \times B) \cup (R(B)|B)^{-1}$

eine zulässige Ordnung auf B.

b) B besitzt bezüglich R(B) keine Sprünge. x sei ein festes Element aus B. Dann gibt es für $n = 1,2, \ldots$ Lücken (A_n / B_n) und Lücken (C_n / D_n), so daß gilt:

1. Aus $n < m$ folgt, daß A_n echt kleiner als A_m, D_n echt kleiner als D_m ist.
2. Die Mengen $B_n \cap C_n$ bilden eine Umgebungsbasis von x.

Man setze $E_{2n-1} = A_n - A_{n-1}$, $E_{2n} = D_n - D_{n-1}$!
$S(B) = \bigcup_{n<m} (E_n \times E_m) \cup (\bigcup_1^\infty E_n \times \{x\}) \cup \bigcup_1^\infty R|E_n$
ist eine zulässige Ordnung auf B.

Zu jedem B aus $\mathfrak{L}_0$ gibt es also eine zulässige Ordnung S(B) derart, daß B bezüglich S(B) in eine der Mengen $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ gehört. Damit ist dieser Fall auf Fall 1 zurückgeführt.

BEMERKUNGEN :

1) Ein total-diskontinuierlicher, lokal-o.f., LINDELÖFscher T_3-Raum ist nicht notwendig o.f. (Beispiel 9a).
2) Ein lokal-o.f., randendlicher, LINDELÖFscher, dem 1.Abzählbarkeitsaxiom genügender T_3-Raum ist nicht notwendig o.f. (Beispiel 1).

DEFINITIONEN :

1) A' sei die Menge der Häufungspunkte von A.
2) Durch transfinite Induktion definiert man für jede Ordnungszahl μ die Menge A^μ durch: $A^0 = A$
$A^\mu = \cap\{(A^\nu)' \mid \nu < \mu\}$.

3) Zu jedem A existiert $\mu(A) = \mathrm{Min}\{\mu \mid A^{\mu} = A^{\mu+1}\}$

4) $(T,\mathcal{T})$ hat Rang Null, wenn $T^{\mu(T)}$ leer ist.

SATZ 9) Ein dem 1. Abzählbarkeitsaxiom genügender LINDELÖF-Raum vom Rang Null ist genau dann o.f., wenn er ein nulldimensionaler T_3-Raum ist.

BEWEIS : Ist $(T,\mathcal{T})$ ein geordneter Raum vom Rang Null, so ist er T_3-Raum. Wäre K eine mehr als einpunktige Komponente von T, so wäre K' = K, also $K \subset T^{\mu(T)}$, also $T^{\mu(T)}$ nicht leer. Widerspruch ! $(T,\mathcal{T})$ ist somit total-diskontinuierlich, also nach Kapitel I, Satz 14 nulldimensional.

Es sei jetzt $(T,\mathcal{T})$ ein dem 1. Abzählbarkeitsaxiom genügender, nulldimensionaler, LINDELÖFscher T_3-Raum vom Rang Null.

a) Ist $\mu(T) = 0$, so ist der Satz trivial.

b) Der Satz sei richtig für jeden Raum $(T_1,\mathcal{T}_1)$ mit $\mu(T_1) < \mu(T)$. Es sei x ein Element von T.

1. Fall: $\mu(T)$ ist Limeszahl. Wäre für jede Umgebung U von x und jedes $\mu < \mu(T)$ der Durchschnitt von U und T^{μ} nicht leer, so wäre x Element von $(T^{\mu})'$ für jedes $\mu < \mu(T)$, also $x \in T^{\mu(T)}$. Widerspruch ! Somit gibt es eine abgeschlossene Umgebung U von x und ein $\mu < \mu(T)$ mit $U \cap T^{\mu} = \emptyset$, also $U^{\mu} = \emptyset$, $\mu(U) < \mu(T)$. U bestimmt als abgeschlossene Teilmenge eines LINDELÖF-Raumes wieder einen LINDELÖF-Raum, ist also nach Induktionsvoraussetzung o.f.

2. Fall: $\mu(T)$ hat einen direkten Vorgänger ν. T^ν ist abgeschlossen in T und wegen $(T^\nu)' = T^{\mu(T)} = \emptyset$ als Relativraum diskret.

1. $x \in C_T T^\nu$. Es gibt eine zu T^ν disjunkte, abgeschlossene Umgebung U von x. Also $U^\nu = \emptyset$, $\mu(U) < \mu(T)$. U ist o.f.

2. $x \in T^\nu$. Es gibt eine zu $T^\nu - \{x\}$ disjunkte, abgeschlossene Umgebung U von x und eine abzählbare Basis $\mathfrak{U} = \{U^n \mid n = 1,2,3,\dots\}$ offen-abgeschlossener Umgebungen von x mit $U^1 = U$. $V^n = \bigcap_1^n U_i$. $W^n = V^n - V^{n+1}$ W^n ist offen-abgeschlossen in T und besitzt nach Induktionsvoraussetzung eine zulässige Ordnung R_n Durch ein Verfahren, das dem Beweis von Satz 8 analog ist, kann gezeigt werden, daß man o.E.d.A. voraussetzen kann, daß W^n bezüglich R_n ein Anfangs- und ein Endelement besitzt. Dann ist $R = \bigcup_1^\infty R_n \cup \bigcup_0 \{W^n \times W^m \mid n < m\} \cup (\bigcup_1^\infty W^n \times \{x\})$ eine zulässige Ordnung auf U.

In jedem Fall ist $(T, \mathfrak{T})$ lokal-o.f., somit nach Satz 8 o.f.

BEMERKUNG : Das 1. Abzählbarkeitsaxiom ist in Satz 9 durchaus wesentlich, denn es gibt nulldimensionale, LINDELÖFsche T_5-Räume vom Rang Null, die weder o.f. noch u.o.f. sind (Beispiel 6).

KAPITEL V : ZUSAMMENHANG

Wann ist ein zusammenhängender Raum o.f. ? Die Ergebnisse der Kapitel III und IV erlauben sofort eine Beantwortung dieser Frage (Satz 1). Das Resultat kann aber noch verbessert werden. Es läßt sich nämlich zeigen, daß das T_3-Axiom durch das schwächere T_1-Axiom ersetzt und die Bedingung der lokalen Kompaktheit gänzlich weggelassen werden kann (Satz 3).

Das so erhaltene Ergebnis erlaubt die Herleitung einer in jüngster Zeit von KOWALSKY angegebenen Charakterisierung der zusammenhängenden, o.f. Räume (Satz 4). Umgekehrt scheint eine direkte Herleitung meiner Resultate aus dem KOWALSKYschen Satz erheblich schwieriger zu sein.

Schließlich erlauben die bisherigen Ausführungen eine einfache Lösung des Ordnungsproblems für lokal-zusammenhängende Räume (Satz 5a, 5b).

HILFSSATZ 1) Jeder lokal-zusammenhängende, lokal-kompakte, randendliche T_2-Raum ist lokal-o.f.
BEWEIS : Ist U eine kompakte Umgebung eines Punktes x, V eine zusammenhängende Umgebung von x mit $V \subset U$, so ist $W = \bar{V}$ ein randendliches Kontinuum , also nach Kapitel III, Satz 2 o.f.

SATZ 1) Ein zusammenhängender Raum $(T,\mathcal{T})$ ist genau dann o.f., wenn er folgenden Bedingungen genügt:

(1) $(T,\mathcal{T})$ ist T_3-Raum.
(2) " " randendlich.
(3) " " lokal-zusammenhängend.
(4) " " lokal-kompakt.

BEWEIS : 1) Die Bedingungen (1) - (4) sind nach Kapitel I, Satz 1, 2, 9, 10 notwendig.
2) Erfüllt der zusammenhängende Raum $(T,\mathcal{T})$ die Bedingungen (1) - (4), so ist er nach Hilfssatz 1 lokal-o.f., also nach Kapitel IV, Satz 2 o.f.

Damit ist das Ordnungsproblem für zusammenhängende Räume prinzipiell gelöst. Die folgenden Ausführungen sollen dazu dienen, das Ergebnis noch zu verbessern (Satz 3).

HILFSSATZ 2) Ist $(T,\mathcal{T})$ ein lokal-zusammenhängender, zusammenhängender Raum, x ein Element von T und K eine Komponente von $C_T\{x\}$, so ist x Häufungspunkt von K.

BEWEIS : K ist offen in T. Wäre x kein Häufungspunkt von K, so wäre K abgeschlossen, also offen-abgeschlossen in T. Widerspruch !

HILFSSATZ 3) Ist $(T,\mathcal{T})$ ein zusammenhängender, lokal-zusammenhängender, randendlicher T_1-Raum mit den Randpunkten a und b, so ist $T_1 = C_T\{a,b\}$ zusammenhängend.

BEWEIS : Angenommen T_1 zerfalle in mehrere Komponenten K_i, $i \in I$. Für jedes i ist K_i Komponente von $(T-\{a\})-\{b\}$, also gilt nach Hilfssatz 2 $b \in \overline{K_i}$. Analog $a \in \overline{K_i}$. Sei x ein Element von K_{i_0}. Wäre $K_{i_0}-\{x\}$ zusammenhängend, so wäre $C_T\{x\} = (K_{i_0}-\{x\}) \cup \bigcup_{i \neq i_0} (K_i \cup \{a,b\})$ zusammenhängend, x also Randpunkt von T. Widerspruch ! Somit zerfällt $K_{i_0}-\{x\}$ in die Komponenten L_j, $j \in J$.

1. Fall: $\{a,b\} \subset \overline{L_{j_0}}$. Dann wären a, b, x Randpunkte von $\overline{L_{j_0}}$. Widerspruch !

2. Fall: $a \in \overline{L_{j_1}}$, $b \in \overline{L_{j_2}}$. Dann wären a, b, x

Randpunkte von $L_{j_1}^- \cup L_{j_2}^- \cup \bigcup_{i \neq i_0} K_i$. Widerspruch !

3. Fall: Für kein j aus J gilt $a \in L_j^-$. Sei U eine zusammenhängende, zu $\{b, x\}$ disjunkte Umgebung von a. Da a Häufungspunkt von K_{i_0} ist, gibt es ein j_0 in J mit $U' = U \cap L_{j_0} \neq \emptyset$. L_{j_0} ist in $C_T\{a, b, x\}$ offen-abgeschlossen. Wegen $a \notin L_{j_0}$ ist U' in U offen-abgeschlossen. Also U' = U. Andererseits gilt $a \in U - U'$. Widerspruch !

HILFSSATZ 4) Ist $(T, \mathcal{T})$ ein lokal-zusammenhängender Raum, x ein Element von T, K eine Komponente von $C_T\{x\}$, so ist $K_1 = K \cup \{x\}$ lokal-zusammenhängend.

BEWEIS : K ist offen in T, also lokal-zusammenhängend. Da T lokal-zusammenhängend ist, gibt es zu jeder Umgebung U von x eine offene, zusammenhängende Umgebung Z von x mit $Z \subset U$. Angenommen $W = Z \cap K_1$ wäre nicht zusammenhängend. Dann gäbe es eine Komponente L von W, die x nicht enthält. L ist nach Konstruktion offen in T, also auch in Z. Aus $y \in L^- \cap Z$ folgt $y \in K^-$, wegen $y \neq x$ also $y \in K$. Also $y \in W$. Somit $y \in L$. L ist offen-abgeschlossen in Z. Widerspruch ! Folglich ist W zusammenhängend, K_1 lokal-zusammenhängend.

HILFSSATZ 5) Ist $(T, \mathcal{T})$ ein zusammenhängender, lokal-zusammenhängender, randendlicher T_1-Raum mit zwei Randpunkten a, b und ist x Element von $C_T\{a, b\}$, so gibt es separierte Mengen A, B mit $a \in A$, $b \in B$, $A \cup B = C_T\{x\}$.

BEWEIS : Ist x Element von $C_T\{a, b\}$, so zer-

fällt $C_T\{a,b,x\}$ in Komponenten L_i, $i \in I$. Wegen $C_T\{a,b,x\} = (C_T\{a,b\}) - \{x\}$ folgt aus Hilfssatz 2 und 3 für jedes i aus I stets $x \in \bar{L}_i$. Ist Z eine offene, zusammenhängende Umgebung von a mit $\{x,b\} \cap Z = \emptyset$, $Z \cap L_i \neq \emptyset$, so gilt $a \in \bar{L}_i$; denn sonst wäre $Z \cap L_i$ offen-abgeschlossen in Z. Ist y ein Punkt aus $C_T\{a,b,x\}$, Z eine zusammenhängende Umgebung von y mit $Z \cap \{a,b,x\} = \emptyset$, $Z \cap L_i \neq \emptyset$, so gilt $Z \subset L_i$, also $y \in L_i$. Setze $I_1 = \{i \mid i \in I, a \in \bar{L}_i\}$!

1. Fall: Es gibt ein i in I_1 mit $b \in \bar{L}_i$. Dann sind a, b, x Randpunkte von $L_i \cup \{a,b,x\}$. Widerspruch !

2. Fall: Für jedes i aus I_1 gilt $b \notin \bar{L}_i$. Dann sind $A = \bigcup_{i \in I_1} L_i \cup \{a\}$, $B = C_T A - \{x\}$ separierte Mengen in $C_T\{x\}$, und es gilt $a \in A$, $b \in B$.

HILFSSATZ 6) Ist $(T,\mathfrak{T})$ ein lokal-zusammenhängender, zusammenhängender Raum, R eine Ordnung auf T mit $\mathfrak{T} \supset \mathfrak{T}_R$, so gilt $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_R$.

BEWEIS : Angenommen $M \in \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_R$. Dann gibt es ein x in M, so daß o.E.d.A. zu jedem $y \in T'$ aus $xR'y$ stets $(x,y)_R \cap C_T M \neq \emptyset$ folgt. Sei Z eine zusammenhängende Umgebung von x, $Z \subset M$.

1. Fall: $Z \cap (x,\infty)_R = \emptyset$. Dann ist $(x,\infty)_R$ eine nicht-leere, offen-abgeschlossene Menge in $(T,\mathfrak{T})$. Widerspruch !

2. Fall: Es gibt ein y in $Z \cap (x,\infty)_R$. Da Z zusammenhängend ist, gilt $(x,y)_R \subset Z$, also $(x,y)_R \subset M$, also $(x,y)_R \cap C_T M = \emptyset$. Widerspruch !

SATZ 2) Jeder lokal-zusammenhängende, randendliche T_1-Raum $(T,\mathcal{T})$ ist ein lokal-o.f., lokalkompakter T_3-Raum.

BEWEIS : Sei x ein Element von T, Z eine offene, zusammenhängende Umgebung von x. Ist Z gleich $\{x\}$, so ist Z eine kompakte, o.f. Umgebung von x. Gibt es ein y in $Z-\{x\}$, so sei K die Komponente von $Z-\{y\}$, die x enthält. Nach Hilfssatz 2 ist y Häufungspunkt von K, nach Hilfssatz 4 ist $K_1=K\cup\{y\}$ eine zusammenhängende, lokal-zusammenhängende Umgebung von x.

1. Fall: Es gibt ein z in $K-\{x\}$, so daß $y\in\bar{L}$ gilt, wenn L die Komponente von $K-\{z\}$ ist, die x enthält. Nach Hilfssatz 2 ist z Häufungspunkt von L. Also sind y und z Randpunkte der zusammenhängenden Umgebung $U=L\cup\{y,z\}$ von x. Nach Hilfssatz 4 ist $L\cup\{z\}$ lokal-zusammenhängend. Ähnlich wie in Hilfssatz 4 zeigt man, daß sogar U lokal-zusammenhängend ist.

2. Fall: Aus $z\in K-\{x\}$ folgt $y\notin\bar{L}$, wenn L die Komponente von $K-\{z\}$ ist, die x enthält. Wäre x kein Randpunkt von K_1 , so würde $K_1-\{x\}$ in mehrere Komponenten L_i , $i\in I$ zerfallen. Sei y Element der Komponente L_1 . Sind M_j, $j\in J$, die Komponenten von $L_1-\{y\}$, so gilt, da L lokal-zusammenhängend und zusammenhängend ist, nach Hilfssatz 2 für jedes j aus J stets $y\in\bar{M_j}$.

Ferner gilt $x \in L_1^-$. Wie beim Beweis von Hilfssatz 5 zeigt man, daß ein j in J mit $x \in M_j^-$ existiert. Also ist $L' = M_j \cup \{x\}$ zusammenhängend in K_1 und es gilt $y \in L'^-$. Ist z ein beliebiges Element aus L_2, so ist L' zusammenhängend in $K - \{z\}$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist x Randpunkt von

In beiden Fällen gibt es also eine zusammenhängende, lokal-zusammenhängende Umgebung U von x mit zwei Randpunkten a und b. Zu jedem y aus $U - \{a,b\}$ zerfällt $U - \{y\}$ nach Hilfssatz 5 in zwei separierte Mengen A(y), B(y) mit $a \in A(y)$, $b \in B(y)$. Ebenso wie in Kapitel III, Satz 2 läßt sich zeigen, daß $R = \{(y,z) \mid y \in A(z)\}$ eine Ordnung auf T definiert und daß $\mathfrak{T} > \mathfrak{T}_R$ gilt. Aus Hilfssatz 6 folgt $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_R$. Somit ist U eine durch R zulässig geordnete, zusammenhängende Umgebung von x mit zwei Randpunkten a und b. Folglich ist U ein kompakter T_5-Raum. Wäre d ein Element aus $U^- - U$, so wären a, b und d Randpunkte von U^-. Widerspruch ! U ist also abgeschlossen in T, x besitzt also eine Basis aus abgeschlossenen, kompakten, o.f. Umgebungen. $(T,\mathfrak{T})$ ist ein lokalkompakter, lokal-o.f. T_3-Raum.

SATZ 3) Ein zusammenhängender Raum $(T,\mathfrak{T})$ ist genau dann o.f., wenn er folgenden Bedingungen genügt:
(1) $(T,\mathfrak{T})$ ist T_1-Raum.
(2) " " randendlich.
(3) " " lokal-zusammenhängend.

BEWEIS : 1) Die Bedingungen sind nach Satz 1 not-

wendig. 2) Erfüllt der zusammenhangende Raum $(T,\mathcal{T})$ die Bedingungen (1), (2) und (3), so ist er nach Satz 2 ein lokal-kompakter T_3-Raum, also nach Satz 1 o.f.

BEMERKUNGEN :

1) Satz 3 kann nicht wesentlich verbessert werden, denn es gilt folgendes Schema:

Raum	Zush.	T_0	T_1	Rand-endl.	Lok-Zush.	O.f.
Beispiel 10	+	+	-	+	+	-
Beispiel 3	+	+	+	-	+	-
Beispiel 4	+	+	+	+	-	-

2) Ein zusammenhängender, lokal-zusammenhängender T_3-Raum $(T,\mathcal{T})$ mit der Eigenschaft, daß für jedes x aus T die Menge $C_T\{x\}$ aus genau zwei Komponenten besteht, ist nicht notwendig o.f. (Beispiel 11).

SATZ 4) (KOWALSKY): Ein zusammenhängender Raum $(T,\mathcal{T})$ ist genau dann o.f., wenn er folgenden Bedingungen genügt:

(1) $(T,\mathcal{T})$ ist T_1-Raum.

(2) " " lokal-zusammenhängend.

(3) Unter je drei zusammenhängenden, echten Teilmengen von T gibt es stets zwei, die T nicht überdecken.

BEWEIS : 1) Man erkennt leicht die Notwendigkeit der Bedingungen (1), (2) und (3). 2) Seien die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt. Dann genügt es zu zeigen, daß $(T,\mathcal{T})$ randendlich ist. Angenommen Z sei eine zusammenhän-

gende Teilmenge von T mit wenigstens drei Randpunkten x_1, x_2, x_3. Für i = 1, 2, 3 sei M_i diejenige Komponente von $C_T\{x_i\}$, die $\mathcal{T}-\{x_i\}$ umfaßt. Dann sind die M_i zusammenhängende, echte Teilmengen von T. Wegen (1) und (2) ist M_i offen, $M_i \cup \{x_i\}$ abgeschlossen in T, also $M_1 \cup M_2 = M_1 \cup \{x_1\} \cup M_2 \cup \{x_2\}$ offen-abgeschlossen in T, also gleich T. Analog $M_1 \cup M_3 = M_2 \cup M_3 = T$. Widerspruch zu (3) !

SATZ 5a) Ein lokal-zusammenhängender Raum $(T,\mathcal{T})$ ist genau dann u.o.f., wenn er folgenden Bedingungen genügt:

(1) $(T,\mathcal{T})$ ist T_1-Raum.

(2) " " randendlich.

BEWEIS : 1) Die Bedingungen sind offenbar notwendig. 2) Ist $(T,\mathcal{T})$ ein lokal-zusammenhängender, randendlicher T_1-Raum, so bilden die Komponenten von $(T,\mathcal{T})$ eine Überdeckung von T durch paarweise disjunkte, offene und nach Satz 3 o.f. Mengen. Also ist $(T,\mathcal{T})$ nach Kapitel IV, Hilfssatz 4 u.o.f.

SATZ 5b) Ein lokal-zusammenhängender Raum $(T,\mathcal{T})$ ist genau dann o.f., wenn er folgenden Bedingungen genügt:

(1) $(T,\mathcal{T})$ ist T_1-Raum.

(2) " " randendlich.

(3) " erfüllt eine der vier folgenden Bedingungen:

(a) Keine Komponente von $(T,\mathcal{T})$ ist kompakt.

(b) Jede " " " " " "

(c) Unendlich viele Komponenten von $(T,\mathcal{T})$

sind kompakt.

(d) Es gibt wenigstens eine nicht-kompakte Komponente in $(T,\mathcal{T})$ mit einem Randpunkt.

BEWEIS : 1) Erfüllt $(T,\mathcal{T})$ die Bedingungen (1), (2) und (3), so schließt man wie in Satz 4 unter Verwendung von Kapitel IV, Hilfssatz 4.

2) Der zusammenhängende Raum $(T,\mathcal{T})$ erfülle die Bedingung (3) nicht. Dann besteht er aus endlich vielen kompakten und wenigstens einer randpunktlosen Komponente, ist also offenbar nicht o.f.

KAPITEL VI : TOTAL-DISKONTINUIERLICHE, METRISCHE RÄUME

Die bisher entwickelten Verfahren zur Ordnung topologischer Räume beruhten sehr wesentlich auf den Zusammenhangseigenschaften derselben. In diesem Kapitel soll eine völlig andere Methode entwickelt werden, die in total-diskontinuierlichen, metrischen Räumen Anwendung findet. Dabei wird der Raum in paarweise disjunkte, offen-abgeschlossene Mengen zerlegt, und diese Mengen werden in geeigneter Weise hintereinander gereiht. Darauf wird jede dieser Mengen in gleicher Weise weiter zerlegt. Die Metrik sorgt - bildlich gesprochen - dafür, daß der Raum nach abzählbar vielen Schritten in einzelne Punkte zerfällt.

DEFINITIONEN :

1) Eine offene Überdeckung eines metrischen Raumes durch paarweise disjunkte, nicht-leere Mengen, deren Durchmesser jeweils kleiner als ε ist, heiße ε-Überdeckung.
2) Ein metrischer Raum heißt zerlegbar, wenn er zu jedem positiven ε eine ε-Überdeckung besitzt.
3) Eine Ordnung R auf T heiße diskret, wenn T bezüglich R ein Anfangs- und ein Endelement besitzt, und wenn $\mathcal{T}_R$ die diskrete Topologie auf T ist.

HILFSSATZ 1) Jede Menge besitzt diskrete Ordnungen.
BEWEIS : Trivial.

SATZ 1) Jeder zerlegbare, metrische Raum $(T,\mathcal{T})$ ist o.f.
BEWEIS : Zu jeder Zerlegung $\mathfrak{U}$ von T in paarweise disjunkte, nicht-leere Mengen gibt es eine Abbildung $f = (g,h)$ von $\mathfrak{U}$ in $T \times T$ mit fol-

genden Eigenschaften:

(1) Für jedes U aus $\mathfrak{U}$ ist f(U) Element von $U \times U$.

(2) Aus $f(U) = (x;x)$ folgt $U = \{x\}$.

Eine derartige Abbildung heiße $\mathfrak{U}$ -Abbildung.

a) Es gibt eine 2^{-1}-Überdeckung $\mathfrak{U}_1$ von T, eine diskrete Ordnung R_1 auf $\mathfrak{U}_1$ und eine $\mathfrak{U}_1$-Abbildung $f_1 = (g_1; h_1)$. $S_1 = \cup \{ A \times B \mid A R_1 B \}$.

b) Seien $\mathfrak{U}_n$, R_n , S_n , $f_n = (g_n; h_n)$ bereits definiert. Zu jedem U aus $\mathfrak{U}_n$ gibt es eine 2^{-n-1}-Überdeckung $\mathfrak{U}(U)$ von U und eine diskrete Ordnung R_U auf $\mathfrak{U}(U)$ derart, daß $g_n(U)$ im Anfangselement von $\mathfrak{U}(U)$, $h_n(U)$ im Endelement von $\mathfrak{U}(U)$ liegt.
$\mathfrak{U}_{n+1} = \cup \{ \mathfrak{U}(U) \mid U \in \mathfrak{U}_n \}$ ist 2^{-n-1}-Überdeckung von T.
$R_{n+1} = \cup \{ R_U \mid U \in \mathfrak{U}_n \} \cup \cup \{ \mathfrak{U}(A) \times \mathfrak{U}(B) \mid A R_n B \}$ ist diskrete Ordnung auf $\mathfrak{U}_{n+1}$. $S_{n+1} = \cup \{ A \times B \mid A R_{n+1} B \}$.
$f_{n+1} = (g_{n+1}; h_{n+1})$ sei eine $\mathfrak{U}_{n+1}$-Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

1. Aus $U \in \mathfrak{U}_n$, $V \in \mathfrak{U}_{n+1}$, $g_n(U) \in V$ folgt $g_{n+1}(V) = g_n(U)$.
2. Aus " , " , $h_n(U) \in V$ folgt $h_{n+1}(V) = h_n(U)$.

c) Setze: $S = \cup \{ S_n \mid n = 1,2,3, \ldots \}$!
Es bleibt zu zeigen, daß S eine zulässige Ordnung auf T ist.

1. Aus $n < m$ folgt $S_n \subset S_m$. Also ist S eine Ordnungsrelation. Sind x, y verschiedene Punkte von T, so gibt es ein n mit $d(x;y) > 2^{-n}$. Also gilt o.E.d.A. $x S_n y$, also xSy. S ist Ordnung auf T.
2. Ist U Umgebung von x bezüglich τ_d , so gibt es ein n derart, daß die offene Sphäre $K(x, 2^{-n})$ um x mit dem Radius 2^{-n} ganz in

U liegt. Ist V das Element aus $\mathfrak{U}_n$, welches x enthält, so gilt $x \in V \subset K(x, 2^{-n}) \subset U$.

1. Fall: $\mathfrak{U}_n = \{V\}$. Also V = T. Also ist U bezüglich $\mathfrak{T}_S$ Umgebung von x.

2. Fall: V besitzt in $\mathfrak{U}_n$ bezüglich $\mathfrak{R}_n$ keinen Vorgänger, aber Nachfolger. Da $\mathfrak{R}_n$ diskret ist, gibt es einen direkten Nachfolger W von V. Sei $y = g_n(W)$. Dann gilt: $x \in (-\infty, y)_S \subset V \subset U$. Also ist U bezüglich $\mathfrak{T}_S$ Umgebung von x.

3. Fall: Analog die restlichen Fälle.

3. U sei Umgebung von x bezüglich $\mathfrak{T}_S$.

1. Fall: Es gibt Elemente y, z in T mit ySx, xSz, $(y,z)_S \subset U$. Dann existiert ein n mit $y S_n x$, $x S_n z$. Ist V das Element von $\mathfrak{U}_n$, in dem x liegt, so gilt $x \in V \subset (y,z)_S \subset U$. Also ist U bezüglich $\mathfrak{T}_d$ Umgebung von x.

2. Fall: Es gibt ein y in T mit xSy, $(-\infty, y)_S \subset U$. Dann existiert ein n mit $x S_n y$. Ist V das Element von $\mathfrak{U}_n$, in dem x liegt, so gilt $x \in V \subset (-\infty, y)_S \subset U$. Also ist U bezüglich $\mathfrak{T}_d$ Umgebung von x.

3. Fall: Analog die restlichen Fälle.

Somit gilt: $\mathfrak{T}_d = \mathfrak{T}_S$. S ist zulässige Ordnung auf T.

DEFINITION : $(T, \mathfrak{T})$ sei ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathfrak{F}$ von Teilmengen von T heißt lokal-endlich, wenn jedes x aus T eine Umgebung besitzt,

die mit höchstens endlich vielen Mengen aus $\mathfrak{F}$ einen nicht-leeren Durchschnitt hat.

HILFSSATZ 2) Ist $\mathfrak{F}$ eine lokal-endliche Familie abgeschlossener Mengen, so ist $A=\cup\{F \mid F\in\mathfrak{F}\}$ abgeschlossen.

BEWEIS : Ist x ein Element von $C_T A$, so gibt es eine Umgebung U von x, die mit höchstens endlich vielen Elementen $F_1,\dots,F_n$ aus $\mathfrak{F}$ einen nicht-leeren Durchschnitt hat. Es gibt eine Umgebung V von x, die zu der abgeschlossenen Menge $F=\bigcup_1^n F_i$ disjunkt ist. Dann ist $U\cap V$ eine zu A disjunkte Umgebung von x.

SATZ 2) Ein total-diskontinuierlicher, metrischer Raum $(T,\mathfrak{T}_d)$ ist genau dann o.f., wenn jede abgeschlossene Menge eine Basis aus offen-abgeschlossenen Umgebungen besitzt.

BEWEIS : 1) Die Bedingung ist nach Kapitel I, Satz 14 notwendig. 2) Um zu zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist, genügt es zu beweisen, daß $(T,\mathfrak{T}_d)$ zerlegbar ist. Der Beweis wird durch Abänderung eines Verfahrens geführt, das beim Metrisationssatz von BING Verwendung findet. Setze: $K(x,r)=\{y \mid d(x,y)<r\}$, $U_x^n=K(x,\varepsilon\cdot 2^{-n})$ mit festem ε , $K(U,r)=\cup\{K(x,r) \mid x\in U\}$! Dann gilt $d(U_x^n, C_T U_x^{n+1}) \geq 2^{-n}-2^{-n-1}=2^{-n-1}$! R sei Wohlordnung auf T. Man definiere durch transfinite Induktion : $V_x^n = U_x^n - \cup\{U_y^{n+1} \mid yRx\}$! Aus yRx folgt somit $V_x^n \subset C_T U_y^{n+1}$, also $d(V_y^n, V_x^n) \geq d(U_y^n, C_T U_y^{n+1}) \geq 2^{-n-1}$. Somit ist $\mathfrak{U}^n=\{(V_x^n)^- \mid x\in T\}$ eine Familie abgeschlossener Mengen, und aus $U\in\mathfrak{U}^n$, $V\in\mathfrak{U}^n$, $U\neq V$ folgt $d(U,V)\geq 2^{-n-1}$. Zu jedem U aus $\mathfrak{U}^n$ gibt es eine offen-abgeschlossene Umgebung V(U) mit $V(U)\subset K(U,2^{-n-3})$. $\mathfrak{W}^n=\{V(U) \mid U\in\mathfrak{U}^n\}$ ist eine

Familie offen-abgeschlossener Mengen,und aus $U \in \mathfrak{W}^n$, $V \in \mathfrak{W}^n$, $U \neq V$ folgt $d(U,V) \geq 2^{-n-1} - 2 \cdot 2^{-n-3} = 2^{-n-2}$. $\mathfrak{W} = \overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} \mathfrak{W}^n$ ist Überdeckung von T durch offen-abgeschlossene Mengen.

1. $\mathfrak{W}^1 = \mathfrak{W}^1$ ist eine lokal-endliche Familie offen-abgeschlossener Mengen.
2. Sei $\mathfrak{W}^n$ bereits als lokal-endliche Familie offen-abgeschlossener Mengen definiert. Für V aus $\mathfrak{W}^{n+1}$ ist $U(V) = V - \cup \{W \mid W \in \mathfrak{W}^n\}$ nach Hilfssatz 2 offen-abgeschlossen. Somit ist $\mathfrak{W}^{n+1} = \mathfrak{W}^n \cup \{U(V) \mid V \in \mathfrak{W}^{n+1}\}$ als Vereinigung zweier lokal-endlicher Familien eine lokal-endliche Familie paarweise disjunkter, offen-abgeschlossener Mengen.
3. Aus $n < m$ folgt $\mathfrak{W}^n \subset \mathfrak{W}^m$. Also ist $\mathfrak{W} = \overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} \mathfrak{W}^n$ eine Familie offen-abgeschlossener, paarweise disjunkter Mengen. $\mathfrak{W}$ ist Überdeckung von T und für jedes W aus $\mathfrak{W}$ gilt $d(W) < 2\varepsilon$. Somit ist $\mathfrak{W}$ eine 2ε-Überdeckung von T.

SATZ 3) Ein total-diskontinuierlicher, metrischer LINDELÖF-Raum ist genau dann o.f., wenn er die Dimension Null hat.

BEWEIS : 1) Die Bedingung ist nach Kapitel I, Satz 14 notwendig. 2) $(T, \mathfrak{T}_d)$ sei ein nulldimensionaler, metrischer LINDELOF-Raum. Zu jedem x aus T existiert eine offen-abgeschlossene Umgebung U(x), so daß bei vorgegebenem positiven ε stets $U(x) < K(x, \frac{1}{2}\varepsilon)$, also $d(U(x)) < \varepsilon$ gilt. $\mathfrak{U} = \{U(x) \mid x \in T\}$ ist offene Überdeckung von T, es gibt also eine abzählbare Teilüberdeckung $\mathfrak{U}' = \{U^n \mid n = 1,2,3,\ldots\}$. Setzt man $V^1 = U^1$, $V^{n+1} = U^{n+1} - \overset{n}{\underset{1}{\cup}} V^i$ so ist $\mathfrak{W} = \{V^n \mid n = 1,2,3,\ldots\}$ eine ε-Überdeckung von T. $(T, \mathfrak{T}_d)$ ist nach Satz 1 o.f.

BEISPIELE :

a) Der Unterraum des E^n , der durch die Menge aller Punkte mit rationalen Koordinaten bestimmt wird, besitzt eine abzählbare Basis, ist also LINDELÖF-Raum, somit nach Satz 3 o.f.

b) Der Unterraum des E^n, der durch die Menge aller Punkte mit irrationalen Koordinaten bestimmt wird, ist nach Satz 3 o.f.

Bezeichnet man einen kompakten, metrischen Raum als Kompaktum,so folgt aus Satz 3 unmittelbar:

FOLGERUNG : Jedes nulldimensionale Kompaktum ist o.f.

KAPITEL VII : ABZÄHLBARKEITS-BEDINGUNGEN

Aus der Tatsache, daß der Komponentenraum und jede Komponente eines topologischen Raumes o.f. sind, kann noch nicht gefolgert werden, daß der Raum selbst u.o.f. oder sogar o.f. ist (Beispiel 5). Wenn jedoch jede Komponente von $(T,\mathfrak{T})$ o.f. ist, und wenn man aus T eine Untermenge U so auswählen kann, daß gilt:

1. Jede einpunktige Komponente von T ist in U enthalten.
2. Jede mehrpunktige Komponente von T hat mit U genau zwei Punkte gemeinsam.
3. Jeder Randpunkt einer Komponente von T ist in U enthalten.
4. U besitzt eine zulässige Ordnung R, so daß Elemente, die in derselben Komponente von T liegen, bezüglich R benachbart sind.

Dann ist $(T,\mathfrak{T})$ u.o.f.

Diese Überlegungen erlauben es, das im vorigen Kapitel entwickelte Verfahren zur Ordnung metrischer Räume so aufzubauen, daß es auf metrische LINDELÖF-Räume angewandt werden kann (Satz 1).

Hieraus ergeben sich als einfache Folgerungen die Lösungen der (Unter-) Ordnungsprobleme für lokal-kompakte, metrische Räume (Satz 2), für Kompakta (Satz 3), für Räume mit abzählbarer Basis (Satz 4) und für abzählbare Räume (Satz 5a, 5b).

SATZ 1) Ein metrischer LINDELÖF-Raum $(T,\mathfrak{T}_d)$ ist genau dann u.o.f., wenn er folgenden Bedingungen genügt:

(1) $(T,\mathfrak{T}_d)$ ist randendlich.

(2) " " diskontinuierlich.

(3) Jede Komponente von (T,η_d) ist lokal-zusammenhängend.

(4) Jede Komponente von (T,η_d) ist Umgebung jedes ihrer Schnittpunkte.

BEWEIS : 1) Die Bedingungen sind offenbar notwendig. 2) Der metrische LINDELÖF-Raum genüge den Bedingungen (1) - (4). Es gibt eine Abbildung f der Menge $\mathfrak{K}$ aller Komponenten von T in die Potenzmenge von T mit folgenden Eigenschaften:

a) f(K) enthält genau einen oder genau zwei Punkte.

b) $f(K) \subset K$.

c) Aus $f(K)=\{x\}$ folgt $K=\{x\}$.

d) Ist x Randpunkt von K, so liegt x in f(K).

Die Menge $U=\cup\{f(K)\mid K\in\mathfrak{K}\}$ ist nach (4) abgeschlossen in T. Der durch U bestimmte Unterraum von (T,η_d) ist somit ein LINDELÖF-Raum. Wegen (2) ist er nulldimensional, also nach Kapitel VI, Satz 3 o.f. Nennt man zwei Elemente x und y aus U benachbart, wenn es ein K in $\mathfrak{K}$ mit $f(K)=\{x,y\}$ gibt, so läßt sich, - was hier im einzelnen nicht durchgeführt werden soll - , durch eine Abänderung der Beweisverfahren von Kapitel VI, Satz 1 und 3 sogar zeigen, daß eine zulässige Ordnung R auf U derart existiert, daß benachbarte Elemente auch bezüglich R benachbart sind. Nach Kapitel V, Satz 3 besitzt jedes K aus $\mathfrak{K}$ wegen (1) und (3) eine zulässige Ordnung R_K . Dabei kann o.E.d.A. angenommen werden,

daß stets $R_K | \varphi(K) = R | \varphi(K)$ gilt. Man bette (K, R_K), falls $(K, \mathcal{T}_{R_K})$ nicht kompakt ist, durch Hinzufügen eines Anfangs- oder Endelements in (K', R'_K) so ein, daß $(K', \mathcal{T}_{R'_K})$ ein Kontinuum ist! Ist $(K, \mathcal{T}_{R_K})$ kompakt, so setze man (K', R'_K) gleich (K, R_K) ! Setzt man ferner $R' = \{(K;L) \mid K \in \mathfrak{K}, L \in \mathfrak{K}, (\varphi(K) \times \varphi(L)) \subset R\}$, so ist $S = \cup\{R'_K \mid K \in \mathfrak{K}\} \cup \cup\{K \times L \mid K R' L\}$ eine Ordnung auf $T' = \cup\{K' \mid K \in \mathfrak{K}\}$. $(T, \mathcal{T}_d)$ ist wegen (4) Unterraum von $(T', \mathcal{T}_S)$, also u.o.f.

Tatsächlich wurde sogar bewiesen:

ZUSATZ : Genügt ein metrischer LINDELÖF-Raum den Bedingungen (1) - (4) von Satz 1 und sind seine Komponenten kompakt, so ist er o.f.

SATZ 2) Ein lokal-kompakter, metrischer Raum ist genau dann u.o.f., wenn er den Bedingungen (1) bis (4) von Satz 1 genügt.

BEWEIS : 1) Die Bedingungen sind offenbar notwendig. 2) Jeder lokal-kompakte, metrische Raum ist topologische Summe von Räumen mit einer abzählbaren Basis, also von LINDELÖF-Räumen (BOURBAKI : Topologie générale, chap. IX, § 2, Excersise 23 d), somit nach Satz 1 von u.o.f. Räumen. Die topologische Summe von u.o.f. Räumen ist nach Kapitel IV, Hilfssatz 4 wieder u.o.f.

SATZ 3) Ein Kompaktum $(T, \mathcal{T}_d)$ ist genau dann o.f., wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $(T, \mathcal{T}_d)$ ist randendlich.

(2) " " diskontinuierlich.

(3) Jede Komponente von $(T, \mathcal{T}_d)$ ist Umgebung jedes ihrer Schnittpunkte.

BEWEIS : Wie in Satz 1 unter Verwendung von Kapitel III, Satz 2.

SATZ 4) Ein Raum $(T,\mathfrak{T})$ mit abzählbarer Basis ist genau dann u.o.f., wenn er folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $(T,\mathfrak{T})$ ist T_4-Raum.
(2) " " randendlich.
(3) " " diskontinuierlich.
(4) Jede Komponente von $(T,\mathfrak{T})$ ist lokal-zusammenhängend.
(5) Jede Komponente von $(T,\mathfrak{T})$ ist Umgebung jedes ihrer Schnittpunkte.

BEWEIS : 1) Die Bedingungen sind offenbar notwendig. 2) Der Raum $(T,\mathfrak{T})$ besitze eine abzählbare Basis und erfülle die Bedingungen (1) - (5). Jede Komponente K von T ist wegen (1), (2), (4) nach Kapitel V, Satz 3 o.f. Ist x Element von T, U eine Umgebung von x, K die Komponente, in der x liegt, so gibt es, da K als Relativraum o.f., also T_3-Raum ist, eine abgeschlossene Umgebung V von x mit $V \cap K \subset U$. Wegen (3) gibt es eine abgeschlossene Umgebung W von x mit $W \cap G K \subset U$. Somit ist $V \cap W$ eine abgeschlossene Umgebung von x mit $V \cap W \subset U$. Also ist $(T,\mathfrak{T})$ ein T_3-Raum. Nach TYCHONOFF ist jeder T_3-Raum mit abzählbarer Basis bereits T_4-Raum, nach URYSOHN jeder T_4-Raum mit abzählbarer Basis metrisierbar. Jeder Raum mit abzählbarer Basis ist offenbar ein LINDELÖF-Raum, also ist $(T,\mathfrak{T})$ nach Satz 1 u.o.f.

ZUSATZ : Genügt ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis den Bedingungen (1) - (5) von Satz 3

und sind seine Komponenten kompakt, so ist er o.f.

BEMERKUNGEN :

1) Keine der Bedingungen von Satz 4 ist eine Folge der restlichen. Das T_1-Axiom kann nicht durch das schwächere T_0-Axiom ersetzt werden. Siehe folgendes Schema !

Raum	Abz. Bas.	T_0	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	u.o.f.
Beispiel	7	+	+	+	+	+	+	-	-
"	4	+	+	+	+	+	-	+	-
"	5	+	+	+	+	-	+	+	-
"	2	+	+	+	-	+	+	+	-
"	10	+	+	-	+	+	+	+	-

2) Jeder Unterraum des E^1 hat eine abzählbare Basis und genügt den Bedingungen (1) - (5). Genügt ein Raum $(T,\mathfrak{T})$ mit abzählbarer Basis den Bedingungen (1) - (5), so erkennt man, wenn man die Beweise für die U.o.f. von $(T,\mathfrak{T})$ betrachtet, daß $(T,\mathfrak{T})$ einem Unterraum des E^1 homöomorph ist. Somit ist ein topologischer Raum genau dann einem Unterraum des E^1 homöomorph, wenn er eine abzählbare Basis besitzt und den Bedingungen (1) bis (5) genügt. Siehe zum Vergleich RUDIN !

Aus Satz 4 folgt unmittelbar:

SATZ 4a) Jeder nulldimensionale T_1-Raum mit abzählbarer Basis ist o.f.

HILFSSATZ 1) Jeder abzählbare T_3-Raum $(T,\mathfrak{T})$ hat die Dimension Null.

BEWEIS : $(T,\mathfrak{T})$ ist als abzählbarer T_3-Raum nach ALEXANDROFF bereits T_4-Raum. Ist x Element von T, U eine offene Umgebung von x, so gibt es nach URYSOHN eine stetige Abbildung von T in das reelle Zahlenintervall $[0,1]$ mit $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ für $y \in C_T U$. Wäre für jedes r aus (0,1) stets $f^{-1}(r)$ nicht-leer, so wäre T überabzählbar. Also gibt es ein r in (0,1) mit $f^{-1}(r) = \emptyset$. Dann ist $f^{-1}[0,r) = f^{-1}[0,r]$ eine offen-abgeschlossene Umgebung von x, die in U enthalten ist.

SATZ 5a) Ein abzählbarer Raum $(T,\mathfrak{T})$ ist genau dann o.f., wenn er folgenden Bedingungen genügt:
(1) $(T,\mathfrak{T})$ ist T_3-Raum.
(2) " genügt dem 1. Abzählbarkeitsaxiom.
BEWEIS : 1) Die Bedingungen sind nach Kapitel I, Satz 1 und 11 notwendig. 2) Genügt ein abzählbarer T_3-Raum der Bedingung (2), so besitzt er eine abzählbare Basis, ist also nach Hilfssatz 1 und Satz 4a o.f.

SATZ 5b) Ein abzählbarer Raum ist genau dann o.f., wenn er metrisierbar ist.
BEWEIS : Ist ein topologischer Raum metrisierbar, so erfüllt er die Bedingungen (1) und (2) von Satz 5a.
Genügt der abzählbare T_3-Raum $(T,\mathfrak{T})$ dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, so besitzt er eine abzählbare Basis, ist also nach TYCHONOFF-URYSOHN metrisierbar.

BEMERKUNGEN :

3) Es gibt abzählbare T_5-Räume, die nicht dem 1. Abzählbarkeitsaxiom genügen, also nicht

o.f. sind. Siehe z.B. URYSOHN !

4) Es gibt abzählbare, dem 1.Abzählbarkeitsaxiom genügende T_2-Räume, die keine T_3-Räume sind (Beispiel 4a).

5) Ein o.f., separabler Raum ist nicht notwendig metrisierbar (Beispiel 13).

HILFSSATZ 2) Jeder abzählbare, kompakte T_2-Raum genügt dem 1.Abzählbarkeitsaxiom.

BEWEIS : Ist x Element von T, so gibt es zu jedem y aus $G_T\{x\}$ eine abgeschlossene Umgebung $U_y(x)$ von x, die y nicht enthält. Setzt man $\mathfrak{U}(x)=\{U_y(x) \mid y\in G_T\{x\}\}$, so ist die Menge $\mathfrak{B}(x)$ aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathfrak{U}(x)$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x; denn ist V eine offene Umgebung von x, so gilt $G_TV\cap\{U\mid U\in\mathfrak{U}(x)\}=\emptyset$ und da G_TV kompakt ist, gibt es ein B in $\mathfrak{B}(x)$ mit $B\cap G_TV=\emptyset$, also $B\subset V$.

SATZ 6) Jeder kompakte, abzählbare T_2-Raum ist o.f.

BEWEIS : Jeder derartige Raum ist T_4-Raum und genügt nach Hilfssatz 2 dem 1.Abzählbarkeitsaxiom, ist also nach Satz 5a o.f.

KAPITEL VIII : BEISPIELE

Die in den vorangegangenen Kapiteln genannten Beispiele wurden der Übersichtlichkeit halber in diesem Kapitel zusammengestellt. Die Eigenschaften der in den Beispielen konstruierten Räume sind meist ohne Beweis angegeben, da sie teils bekannt sind, sich teils aus den bisherigen Ergebnissen leicht herleiten lassen.

BEISPIELE :

1) Der durch $T=(0,1)\cup\{2\}$ bestimmte Unterraum $(T,\mathfrak{T})$ des E^1 hat folgende Eigenschaften:
   1. $(T,\mathfrak{T})$ ist lokal-o.f.
   2. " " u.o.f.
   3. " " randendlicher, LINDELÖFscher T_5-Raum.
   4. " genügt den 1.Abzählbarkeitsaxiom.
   5. " ist nicht o.f.

2) Der durch $T=\{(x;y)\mid x^2+y^2=1\}$ bestimmte Unterraum $(T,\mathfrak{T})$ des E^2 hat folgende Eigenschaften:
   1. $(T,\mathfrak{T})$ ist Quotientenraum des durch $[0,1]$ bestimmten, o.f. Unterraumes des E^1.
   2. " " lokal-o.f.
   3. " " zusammenhängender, lokal-zusammenhängender T_5-Raum mit abzählbarer Basis.
   4. T ist Vereinigung der beiden o.f. Mengen $T_1=\{(x;y)\mid x^2+y^2=1,\ y\geq 0\}$, $T_2=\{(x;y)\mid x^2+y^2=1,\ y<0\}$.
   5. $(T,\mathfrak{T})$ ist nicht randendlich, also nicht u.o.f., also nicht o.f.

3) $(T_1,\mathfrak{T}_1)$ sei der durch $[0,1]$ bestimmte Unterraum des E^1 . Der Produktraum $(T,\mathfrak{T})=(T_1\times T_1,\mathfrak{T}_1\otimes\mathfrak{T}_1)$

hat folgende Eigenschaften:

1. $(T,\mathcal{T})$ ist Produktraum von o.f. Räumen.
2. " " zusammenhängender, lokal-zusammenhängender T_5-Raum.
3. " " nicht randendlich, also nicht u.o.f.

4) Eine Teilmenge U von $T=[0,1]$ sei offen, wenn $U-\{\frac{1}{n} \mid n=1,2,3,\ldots\}$ bezüglich der gewöhnlichen Topologie von T offen ist. Der so konstruierte Raum $(T,\mathcal{T})$ hat folgende Eigenschaften:

1. $(T,\mathcal{T})$ ist lokal-o.f.
2. T ist Vereinigung der beiden o.f. Mengen $T_1=(0,1]$, $T_2=T-\{\frac{1}{n} \mid n=1,2,3,\ldots\}$.
3. $(T,\mathcal{T})$ ist randendlicher, zusammenhängender, LINDELÖFscher T_2-Raum.
4. " " nicht lokal-zusammenhängend, nicht u.o.f., kein T_3-Raum.

4a) Der durch die Menge U aller rationalen Punkte bestimmte Unterraum $(U,\mathcal{U})$ des in Beispiel 4 konstruierten Raumes $(T,\mathcal{T})$ hat folgende Eigenschaften:

1. $(U,\mathcal{U})$ ist lokal-o.f.
2. " " abzählbarer, dem 1.Abzählbarkeitsaxiom genügender T_2-Raum.
3. " " kein T_3-Raum, also nicht u.o.f.

5) Der durch $T=\{(0;0)\}\cup\{(\frac{1}{n};x) \mid x \text{ reell}, n=1,2,3,\ldots\}$ bestimmte Unterraum $(T,\mathcal{T})$ des E^2 hat folgende Eigenschaften:

1. Jede Komponente von $(T,\mathcal{T})$ ist o.f.
2. Der Komponentenraum von $(T,\mathcal{T})$ ist o.f.

3. Jede Komponente von $(T,\mathfrak{T})$ ist Umgebung jedes ihrer Schnittpunkte.
4. $(T,\mathfrak{T})$ ist ein randendlicher T_5-Raum mit abzählbarer Basis.
5. " " nicht diskontinuierlich, nicht lokal-o.f., nicht u.o.f.

6) Sei T' die Menge aller Ordnungszahlen, die kleiner als ω_1 sind, R die natürliche Ordnung von T'. Für i = 1, 2, 3 sei
$T_i = \{(x,i) \mid x \in T'\}$, $R_i = \{((x,i),(y,i)) \mid x R y\}$
Eine Teilmenge U von $T = \bigcup_1^3 T_i \cup \{\omega_1\}$ sei offen, wenn gilt: a) $U \cap T_i \in \mathfrak{T}_{R_i}$ für i = 1, 2, 3.
b) Ist ω_1 Element von U, so gibt es ein μ in T' derart, daß $\bigcup_1^3 ((\mu,i),\infty)_{R_i}$ in U enthalten ist.

Der so konstruierte Raum $(T,\mathfrak{T})$ hat folgende Eigenschaften:
1. $(T,\mathfrak{T})$ ist kompakt, also LINDELÖF-Raum.
2. " " nulldimensionaler T_5-Raum vom Rang Null.
3. " " nicht lokal-u.o.f., also nicht u.o.f., nicht o.f. (siehe nachfolgenden Beweis).

Die Tatsache, daß $(T,\mathfrak{T})$ nicht o.f. ist, soll indirekt bewiesen werden. Wäre R eine zulässige Ordnung auf T, so wäre ω_1 o.E.d.A. Häufungspunkt von $U = T_1 \cap (-\infty,\omega_1)_R$. Da T_1 in T offen ist, gibt es zu jedem x aus U ein f(x) in T mit f(x)Rx, $(f(x),x)_R \subset U$. Angenommen zu jedem a aus U gäbe es ein Element x(a) in U derart, daß aus $z \in U$, x(a)Rz stets aRf(z)

folgt. Dann könnte man ein beliebiges Element x_0 in U und zu jedem x_n ein x_{n+1} in U so wählen, daß aus $z \in U$, $x_{n+1} R z$ stets $x_n R f(z)$ folgen würde. Nach einem bekannten Satz ist $s = \sup \{x_n \mid n = 1,2,3,\ldots\}$ Element von U, es gibt also ein n mit $f(s) R x_n$. Andererseits gilt $x_{n+1} R s$, also $x_n R f(s)$. Widerspruch ! Somit gibt es ein a in U derart, daß zu jedem x aus U ein z in U so existiert, daß xRz, f(z)Ra gilt. Also $(a,\omega_1)_R \subset \bigcup \{(f(z),z)_R \mid z \in U\} \subset U$. Also ist ω_1 kein Häufungspunkt von $T_1 \cap (-\infty,\omega_1)_R$ für i = 2, 3. Ist ω_1 Häufungspunkt von $T_2 \cap (\omega_1,\infty)_R$, so zeigt man analog, daß ω_1 kein Häufungspunkt von $T_3 \cap (\omega_1,\infty)_R$ ist. Also ist ω_1 kein Häufungspunkt von T_3 . Widerspruch !

Durch eine leichte Abänderung dieses Verfahrens läßt sich beweisen, daß keine Umgebung von ω_1 u.o.f. ist.

Ähnlich beweist man auch folgende Sätze, die später benötigt werden:

Satz a) Ist (T,R) eine Menge vom Ordnungstyp $\lambda = \omega_1 + 1 + (-\omega_1)$, so gibt es keine zulässige Ordnung S von (T,T_R), die dasjenige Element von T, das bezüglich λ die Stelle der 1 einnimmt, als Anfangselement enthält.

Satz b) Der entsprechende Satz gilt für eine Menge vom Ordnungstyp $\lambda = \omega_1 + 1 + (-\omega_0)$.

7) Der durch $T = \{(0;x) \mid x \text{ reell}\} \cup \{(\frac{1}{n},0) \mid n = 1,2,3,\ldots\}$ bestimmte Unterraum $(T,\mathcal{T})$ des E^2 hat folgende Eigenschaften:

1. Jede Komponente von $(T,\mathcal{T})$ ist o.f.

2. Der Komponentenraum von $(T,\mathcal{T})$ ist o.f.
3. $(T,\mathcal{T})$ ist randendlicher, diskontinuierlicher T_5-Raum mit abzählbarer Basis.
4. " " nicht lokal-u.o.f., nicht lokal-o.f., nicht u.o.f., nicht o.f.

8) Der durch $T=[-1,0]\cup\bigcup_1^\infty\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)\mid n=1,2,\ldots\right\}$ bestimmte Unterraum des E^1 ist nicht lokal-o.f.

9) (T_0,R_0) sei eine Menge vom Ordnungstyp $\lambda=(1+(-\omega_1)+\omega_1+1)\cdot(-\omega_0+\omega_0)$. Sei (T_n,R_n) bereits definiert. Fügt man zwischen je zwei benachbarte Punkte von T_n eine Menge vom Ordnungstyp $-\omega_1+\omega_1$ ein, so erhält man eine geordnete Menge (T_{n+1},R_{n+1}) mit $T_n\subset T_{n+1}$, $R_{n+1}|T_n=R_n$. Setzt man $T=\bigcup_1^\infty T_n$, $R=\bigcup_1^\infty R_n$, so ist $(T,\mathcal{T}_R)$ ein geordneter, nulldimensionaler LINDELÖF-Raum. Unter Verwendung von Satz a) und b) aus Beispiel 6 läßt sich zeigen, daß es keine zulässige Ordnung S auf T so gibt, daß T bezüglich S ein Anfangselement besitzt.

9a) Fügt man zu dem in Beispiel 9 konstruierten Raum einen isolierten Punkt hinzu, so erhält man einen Raum $(T,\mathcal{T})$ mit folgenden Eigenschaften:
1. $(T,\mathcal{T})$ ist lokal-o.f.
2. " " u.o.f.
3. " " nulldimensionaler, LINDELÖFscher T_5-Raum.
4. " " nicht o.f.

10) Der Raum $(T,\mathcal{T})$ mit $T=\{0,1\}$, $\mathcal{T}=\{\emptyset,\{0\},T\}$ hat folgende Eigenschaften:
   1. $(T,\mathcal{T})$ ist zusammenhängender, lokal-zusammenhängender, kompakter, randendlicher T_3-Raum mit abzählbarer Basis.
   2. " " nicht lokal-u.o.f., nicht lokal-o.f., nicht u.o.f., nicht o.f.

11) Eine Teilmenge U von $T=\{(x,y,z^2) \mid x,y,z \text{ reell}\}$ sei offen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
   a) Ist $\mathfrak{P}=(x,y,0)$ Element von U, so gibt es ein positives ε mit $K(\mathfrak{P},\varepsilon)\cap T\subset U$.
   b) Ist $\mathfrak{P}=(x,y,z)$ Element von U, $z>0$, so gibt es ein positives ε mit $K(\mathfrak{P},\varepsilon)\cap\{(x,y,t) \mid t \text{ reell}\}\subset U$.

   Der so konstruierte Raum $(T,\mathcal{T})$ hat folgende Eigenschaften:
   1. $(T,\mathcal{T})$ ist ein zusammenhängender, lokal-zusammenhängender T_3-Raum ohne Randpunkte.
   2. Für jedes x aus T zerfällt $C_T\{x\}$ in genau zwei Komponenten.
   3. $(T,\mathcal{T})$ ist nicht lokal-u.o.f., nicht lokal-o.f., nicht u.o.f., nicht o.f.

12) Sei für i = 0,1 T_i die Menge aller Ordnungszahlen, die nicht größer als ω_i sind, sei R_i die natürliche Ordnung auf T_i , sei $(T',\mathcal{T}')$ der aus $(T_0,\mathcal{T}_{R_0})$ und $(T_1,\mathcal{T}_{R_1})$ gebildete Produktraum und sei $(T,\mathcal{T})$ der Unterraum, der aus $(T',\mathcal{T}')$ durch Wegnahme des Punktes (ω_0,ω_1) entsteht. Dann gilt:
   1. $(T,\mathcal{T})$ ist lokal-o.f.

2. $(T, \mathfrak{T})$ ist nulldimensionaler (also auch randendlicher) T_3-Raum.
3. " " kein T_4-Raum, also nicht u.o.f.

13) Ist λ der Ordnungstyp des E^1, (T,R) eine Menge vom Ordnungstyp $1+2\cdot\lambda+1$, so gilt:
1. $(T, \mathfrak{T}_R)$ ist o.f.
2. " " kompakt, separabel und genügt dem 1.Abzählbarkeitsaxiom.
3. " besitzt keine abzählbare Basis, ist also nicht metrisierbar.

ZUSAMMENFASSUNG

Ein topologischer Raum heißt:

ordnungsfähig (o.f.), wenn er einem geordneten Raum homöomorph ist,

unterordnungsfähig (u.o.f.), wenn er einem Unterraum eines geordneten Raumes homöomorph ist,

lokal-ordnungsfähig (lokal-o.f.), wenn jeder Punkt eine ordnungsfähige Umgebung besitzt.

Folgende Probleme wurden untersucht:

1. Wann ist ein lokal-o.f. Raum bereits o.f. ?
   Das Problem wurde für zusammenhängende (IV,2) und für kompakte Räume (IV,7) gelöst, und zwar wurde gezeigt, daß ein lokal-o.f. Raum in jedem der beiden genannten Fälle genau dann o.f. ist, wenn er ein randendlicher T_3-Raum ist. Andererseits gibt es zusammenhängende, lokal-zusammenhängende, lokal-o.f., randendliche T_2-Räume, die nicht o.f. sind (Beispiel 4).
   Ferner wurde bewiesen, daß jeder lokal-o.f. T_3-Raum eine Überdeckung aus offen-abgeschlossenen, o.f. Mengen besitzt (IV,4).
2. Wann ist ein lokal-o.f. Raum bereits u.o.f. ?
   Das Problem wurde für die unter 1. angeführten Räume sowie für LINDELÖFsche (IV,6) und für lokal-zusammenhängende (IV,5) Räume gelöst. Wieder erwiesen sich Randendlichkeit und Regularität als hinreichend und notwendig. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß es lokal-o.f., nulldimensionale T_3-Räume gibt, die nicht u.o.f. sind (Beispiel 12).

3. Wann ist ein topologischer Raum o.f. ?
Das Problem wurde für zusammenhängende (V,1,2,3), lokal-zusammenhängende (V,5b) und für abzählbare Räume (VII,5a,5b) sowie für total-diskontinuierliche, metrische Räume (VI,2,3) und für Kompakta (VII,3) gelöst. Im einzelnen erwiesen sich folgende Bedingungen als notwendig und hinreichend:
a) Für zusammenhängende Räume: Lokaler Zusammenhang, Randendlichkeit und T_1-Axiom.
b) Für abzählbare Räume: Regularität und 1.Abzählbarkeitsaxiom.
c) Für abzählbare Räume: Metrisierbarkeit.
d) Für total-diskontinuierliche, metrische Räume: Jede abgeschlossene Menge besitzt eine Basis aus offen-abgeschlossenen Umgebungen.
e) Für Kompakta: Der Raum ist randendlich, diskontinuierlich und jede Komponente ist Umgebung jedes ihrer Schnittpunkte.
Bemerkenswert erscheint u.a. die Tatsache, daß ein zusammenhängender, lokal-zusammenhängender T_3-Raum $(T,\mathfrak{T})$ mit der Eigenschaft, daß für jedes x aus T $C_T\{x\}$ in genau zwei Komponenten zerfallt, nicht notwendig o.f. ist (Beispiel 11).
4. Wann ist ein topologischer Raum u.o.f. ?
Das Problem wurde für die unter 3. angeführten Räume sowie für metrische LINDELÖF-Räume (VII,1), lokal-kompakte, metrische Räume (VII,2) und für Räume mit abzählbarer Basis (VII,4) gelöst, und zwar wurde gezeigt, daß ein topologischer Raum $(T,\mathfrak{T})$ in jedem der drei letztgenannten Fälle genau dann u.o.f. ist, wenn er folgenden Bedingungen genügt:

(1) $(T,\mathfrak{T})$ ist T_1-Raum.
(2) " " randendlich.
(3) " " diskontinuierlich.
(4) Jede Komponente von $(T,\mathfrak{T})$ ist lokal-zusammenhängend.
(5) " " " " " " Umgebung jedes ihrer Schnittpunkte.

Keine der Bedingungen (1) - (5) folgt aus den übrigen.(Man beachte das Schema auf Seite 56 !)

LITERATURVERZEICHNIS

Alexandroff, P. : Einführung in die Mengenlehre und in die Theorie der reellen Funktionen, Berlin 1956.

Bourbaki, N. : Topologie générale, chapitre I,II, Paris 1951.

Bourbaki, N. : Topologie générale, chapitre IX, Paris 1958.

Kamke, E. : Mengenlehre, Berlin 1955.

Kelley, J.L. : General topology, New York-Toronto-London 1955.

Kowalsky, H.J. : Topologische Räume, Basel-Stuttgart 1961.

Kuratowski, C. : Topologie I, Warschau 1952.

Rudin, M.E. : A topological characterization of sets of real numbers, Pacific J. Math. 7 (1957), 1185-1186.

Tychonoff, A. : Über einen Metrisationssatz von Urysohn, Math. Ann. 95 (1925), 139 - 142.

Urysohn, P. : Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Ann. 94 (1925), 262 - 295.

Urysohn, P. : Zum Metrisationsproblem,Math. Ann. 94 (1925) 309 - 315.

Whyburn, G.T. : Analytic topology, New York, 1942.

INHALTSVERZEICHNIS

		Seite
Einleitung		3
Kapitel 0	: Bezeichnungen	4
" I	: Einige Eigenschaften geordneter Räume	8
" II	: Die Eindeutigkeit der Ordnung	12
" III	: Kontinua	15
" IV	: Lokale Ordnungsfähigkeit	21
" V	: Zusammenhang	37
" VI	: Total-diskontinuierliche, metrische Räume	46
" VII	: Abzählbarkeits-Bedingungen	52
" VIII	: Beispiele	59
Zusammenfassung		66
Literaturverzeichnis		69

Lebenslauf des Verfassers

Am 11.9.37 wurde ich als drittes Kind des Technikers Alfons Herrlich und seiner Ehefrau Käte in Berlin geboren, später durch die Kriegswirren nach Dresden verschlagen und dort im Herbst 44 eingeschult. Nach Berlin zurückgekehrt besuchte ich zunächst die Volksschule in Waidmannslust, seit Herbst 47 die Humboldt-Schule in Tegel, an der ich am 5.3.56 das Reifezeugnis erwarb.

Anschließend studierte ich 8 Semester an der Freien Universität Berlin und 1 Semester an der Universität Tübingen die Fächer Mathematik, Zoologie und Botanik. Meine Lehrer während des Hochschulstudiums waren in Mathematik die Professoren Grotemeyer, Dinghas, Levi, Ostmann, Stöhr, Meschkowski sowie Dr. Huppert und Dr. Engel, in Zoologie die Professoren Lüers, Ulrich, Günther, Urich, Grell, Krause, Schwartz sowie Dr. Kaudewitz und Dr. Laskowski, in Botanik die Professoren Drawert, Eckardt, Zimmermann, Bünning, Frau Professor Thielke und Dr. Küster.

Am 9.5.61 bestand ich vor dem Landesprüfungsamt Berlin das Staatsexamen in den Fächern Mathematik (Prof. Grotemeyer) und Biologie (Prof. Thielke und Prof. Lüers) mit Auszeichnung.

Seit dem 17.10.61 bin ich in Berlin als Studienreferendar angestellt.

Die vorliegende Arbeit entstand unter Leitung von Professor Grotemeyer.